



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Grupos de simetría

Autor/es

ELENA PEDROSA ARANSAY

Director/es

JESÚS ANTONIO LALIENA CLEMENTE

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



***Grupos de simetría***, de ELENA PEDROSA ARANSAY  
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative  
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.  
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los  
titulares del copyright.



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

## TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Grupos de simetría

Realizado por:

Elena Pedrosa Aransay

Tutelado por:

Jesús Antonio Laliena Clemente

Logroño, junio, 2018



# Índice

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Isometrías</b>	<b>3</b>
2.1. Isometrías de la recta real . . . . .	4
2.2. Isometrías del plano real . . . . .	7
2.2.1. Propiedades generales . . . . .	7
2.2.2. Tipos básicos de isometrías en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
2.2.3. Teorema de la forma normal . . . . .	10
2.2.4. Composición y conjugación de isometrías . . . . .	10
2.2.5. Composición de simetrías axiales . . . . .	11
<b>3. Un paseo por la teoría básica de grupos</b>	<b>17</b>
3.1. Conceptos y resultados básicos . . . . .	17
3.2. Generadores y relaciones . . . . .	20
<b>4. Subgrupos discretos del Grupo Euclídeo del plano</b>	<b>23</b>
4.1. Teorema de Leonardo . . . . .	23
4.2. Teorema de clasificación . . . . .	25
4.3. Frisos y sus grupos de simetría . . . . .	27
<b>5. Grupos cristalográficos planos</b>	<b>35</b>
5.1. Caso OP . . . . .	35
5.2. Caso OR . . . . .	39
5.3. Teselaciones del plano . . . . .	45
<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>Referencias</b>	<b>57</b>



# Resumen

En este trabajo estudiaremos el grupo de isometrías de la recta real y del plano real, ambos con la métrica euclídea. El punto de vista que tomaremos será fundamentalmente geométrico.

Comenzaremos analizando ambos grupos, describiendo para ello sus elementos, junto con sus propiedades y las reglas de composición y conjugación de isometrías en cada caso.

Una vez hecho este análisis, nos centraremos en un tipo de subgrupos del grupo de isometrías, llamados subgrupos discretos, caracterizados por la propiedad de que para un punto cualquiera, todo subconjunto acotado (de la recta real o del plano real) que lo contenga, solo tiene un número finito de puntos de la órbita bajo el subgrupo del punto tomado.

Finalizaremos el trabajo realizando la clasificación de los subgrupos discretos del grupo de isometrías de  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , donde nos encontraremos con los grupos de friso o los grupos cristalográficos planos, que son también ejemplos de grupos de simetría (subgrupos de isometrías que fijan un subconjunto de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^2$ ).

# Abstract

In this paper we will study the group of isometries of the real line and the real plane, both of them with the Euclidean metric. The point of view that we will take will be mainly geometric.

We will begin by analyzing both groups, describing for this its elements, together with their properties and the composition and conjugation rules of isometries in each case.

Once this analysis is made, we will focus on a type of subgroups of the group of isometries, called discrete subgroups, characterised by the following property: for any point, all bounded subset (of the real line or the real plane) containing it has only a finitely number of points of the orbit of the selected point under the subgroup.

We will finish this paper by making a classification of the discrete subgroups of the group of isometries of  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{R}^2$ , where the frieze groups and the crystallographic groups of the plane will appear. Both of them are examples of symmetry groups (subgroups of isometries that fixe a subset of  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{R}^2$ ).



# Introducción

La simetría es un concepto relacionado con el orden, la belleza y la armonía, que tiene una presencia abundante en la naturaleza, al igual que en otros campos como la ingeniería y la arquitectura. A lo largo de la historia, paredes, telas y utensilios domésticos han sido decorados utilizando una figura base y repitiéndola con algún tipo de regularidad. Cuando la repetición se realiza siguiendo una recta se obtiene una cenefa o friso, mientras que cuando se hace rellenando una región del plano se obtiene lo que se conoce como mosaico o teselación.

La teoría matemática de la simetría se desarrolló a comienzos del siglo XX y permitió clasificar todos los posibles frisos en 7 grupos geométricos, los grupos de friso, y todas las teselaciones en 17 grupos llamados grupos cristalográficos planos. Evgraf Fedorov (1853 – 1919) determinó en 1891 los 17 grupos cristalográficos planos en un documento que no recibió mucha atención al estar escrito en ruso. Fue a través del trabajo de Paul Niggli (1888 – 1953) y George Pólya (1887 – 1985), los cuales describieron los 7 grupos de friso y los 17 grupos cristalográficos planos en la década de los 20, cuando el enfoque matemático en el análisis de estos grupos de simetría se hizo más conocido.

Otra de las tantas aplicaciones de la teoría de la simetría está en el arte. El estudio de las antiguas civilizaciones como la egipcia y la china, así como la decoración morisca y el arte étnico, permite, comparando las diferentes figuras presentes en cada una de ellas clasificadas por su grupo de simetría, descubrir conexiones e influencias entre diferentes culturas, alejadas en el tiempo y el espacio. Los primeros ejemplos de arte decorativo que han podido clasificarse por su grupo de simetría datan del paleolítico. En España hay dos importantes conjuntos arquitectónicos que contienen muestras de los 17 grupos cristalográficos planos: la Alhambra de Granada y el arte mudéjar aragonés. Fuera de España, en el Partenón de Atenas, podemos encontrar muestras de los diferentes grupos de friso. Cabe destacar también que artistas conocidos como el holandés M. C. Escher (1898 – 1972), que acudía de forma habitual al palacio de la Alhambra para trabajar en sus creaciones, introducían simetrías y teselaciones en sus obras.

El objetivo de este trabajo es obtener la clasificación de todos los subgrupos discretos de los grupos de isometrías de la recta y del plano reales, ambos con la métrica usual. Comenzaremos en la sección 1 recordando algunos conceptos topológicos y algebraicos básicos necesarios para la comprensión de las secciones posteriores. En la sección 2, introduciremos las definiciones de isometría en un espacio métrico y de grupo de simetrías de un subconjunto de un espacio métrico, junto con algunos resultados relacionados con estos conceptos. De ahí, pasaremos en primer lugar a analizar el grupo de isometrías de la recta real con la métrica euclídea. Una vez hecho el análisis, estudiaremos el grupo de isometrías del plano real, también con la métrica euclídea. Veremos también los tipos básicos de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  junto con sus propiedades, y estableceremos mediante el teorema de la forma normal una descomposición única para cualquier isometría de  $\mathbb{R}^2$ . Terminaremos la sección examinando la composición de las diferentes isometrías. La sección 3, en la que se da un rápido repaso a conceptos básicos de teoría de grupos que se van a emplear, se ha incluido con el objetivo de facilitar la comprensión de las secciones 4 y 5, por lo que en ella no se ha considerado necesario añadir las demostraciones de los resultados presentados. En la sección 4, introduciremos la definición de subgrupo discreto, y tras dar una serie de resultados relacionados con este tipo de subgrupos, llegaremos a un teorema de clasificación de los subgrupos discretos del grupo de isometrías del plano. Esta clasificación la haremos en función del subgrupo de traslaciones del subgrupo discreto, donde veremos que solo tiene tres opciones, ser trivial, cíclico infinito o un grupo abeliano libre de rango dos. Los dos primeros casos se analizarán en esta sección, siendo el segundo

el que dará lugar a los grupos de friso. Al final de esta sección se incluirá un ejercicio en el que se realizará la clasificación de los subgrupos discretos de la recta real. Finalizaremos la memoria en la sección 5 con la clasificación, complementada con algunos ejemplos, de los subgrupos discretos del grupo de isometrías del plano cuyo subgrupo de traslaciones es un grupo abeliano libre de rango dos.

Un hecho a destacar del trabajo es que la obtención de la clasificación de los subgrupos discretos de la recta y del plano no usa el álgebra matricial. Las demostraciones utilizan como herramienta la teoría de grupos y la geometría euclídea de la recta y del plano.

Como curiosidad cabe destacar también que, al igual que en  $\mathbb{R}^2$ , existen grupos cristalográficos en  $\mathbb{R}^3$ . Más concretamente, hay 230 grupos cristalográficos tridimensionales. Los matemáticos Fedorov, Schönflies (1853 – 1928) y William Barlow (1845 – 1934) determinaron de forma independiente estos grupos entre 1890 y 1900.

De hecho, uno de los principales matemáticos del siglo XX, David Hilbert (1862 – 1943), centró su atención en los grupos cristalográficos en su famosa conferencia de 1900 en el Congreso Internacional de Matemáticos de París. Allí, uno de los 23 problemas que planteó fue si el número de grupos cristalográficos en dimensión  $n$  es siempre finito, lo cual fue probado por Ludwig Bieberbach (1886 – 1982) en 1910. En el caso de dimensión 4, están clasificados 4783 grupos cristalográficos.

La mayor parte de la memoria está basada en el libro “Symmetries” de D. L. Johnson (ver [1]). Las imágenes que aparecen dentro del apartado 4.3, en el subapartado titulado “Frisos en la realidad”, han sido obtenidas del libro “Mathematics and Technology” de Christiane Rousseau y Yvan Saint-Aubin (ver [2]). Parte de la introducción está obtenida del libro “Contemporary Abstract Algebra” de Joseph A. Gallian (ver [3]), de una página web del CSIC (ver [4]), de una página web de la American Mathematical Society (ver [5]), y de la página web de Timothy Peil, profesor emérito de matemáticas de la Universidad Estatal de Minnesota en Moorhead (ver [6]).

# 1. Preliminares

En esta sección vamos a recordar una serie de conceptos topológicos y algebraicos básicos, necesarios para comprender bien todo lo que se va a desarrollar posteriormente.

**Definición 1.1.** Una **métrica o distancia** en un conjunto  $X$  es una aplicación  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ , dándose la igualdad si y solo si  $x = y$ .
- (simétrica)  $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$ .
- (desigualdad triangular)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \ \forall x, y, z \in X$ .

Al par  $(X, d)$ , denotado sencillamente por  $X$  cuando no hay lugar a confusión acerca de la métrica utilizada, se le llama **espacio métrico**.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $\forall x, y \in X$ ,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

es una métrica en  $X$ , llamada métrica discreta. Al par  $(X, d)$  se le llama espacio métrico discreto.

**Ejemplo 1.3.** Sea  $X = \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$d(x, y) = |x - y|$$

es una métrica en  $\mathbb{R}$ , llamada métrica euclídea o usual. Al par  $(\mathbb{R}, d)$  se le llama espacio métrico euclídeo o usual.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

- (Generalización del Ejemplo 1.3)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

- $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$
- $d(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\},$

son métricas en  $\mathbb{R}^n$ , llamadas métrica euclídea, de Manhattan y del máximo, respectivamente.

**Definición 1.5.** Un **grupo**  $G$  es un conjunto no vacío, cerrado bajo una operación binaria asociativa, y tal que contiene un elemento identidad y el inverso de cada uno de sus elementos. Al número de elementos de  $G$  se le llama **orden** de  $G$  y se denota por  $|G|$ . Si todos los elementos de  $G$  conmutan,  $G$  se dice **abeliano**.

**Definición 1.6.** Siendo  $x, y$  dos elementos de un grupo  $G$ , se definen el **conjugado** de  $x$  por  $y$  como  $x^y = yxy^{-1}$ , y el **conmutador** de  $x$  e  $y$  como  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ .

**Definición 1.7.** Dado  $G$  un grupo, un subconjunto no vacío  $H \subseteq G$  cerrado por productos y por inversos se dice **subgrupo** de  $G$ , y se denota  $H \leq G$ .

**Definición 1.8.** Dados  $G$  un grupo,  $H \leq G$ ,  $g \in G$ , se llaman **coclases a izquierda** (respectivamente a derecha) a los conjuntos  $gH = \{gh \mid h \in H\}$  (respectivamente  $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ ). Ambas coclases forman una partición de  $G$  y además se cumple que,  $\forall g \in G$ ,  $|gH| = |H| = |Hg|$ .

## 2. Isometrías

En esta sección vamos a introducir el concepto de isometría en un espacio métrico, del cual surge el concepto de simetría de un subconjunto de un espacio métrico. Además, haremos un estudio de las isometrías de la recta y del plano reales con la métrica euclídea. Veremos que tanto unas como otras tienen una forma normal única. Además veremos los tipos que hay en cada caso. En el plano real veremos que hay cuatro tipos básicos de isometrías: traslaciones, giros, simetrías axiales y simetrías axiales con traslación.

**Definición 2.1.** Una **isometría** en un espacio métrico  $(X, d)$  es una función biyectiva  $u : X \rightarrow X$  que preserva la distancia:

$$d(u(x), u(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

El conjunto de todas las isometrías del espacio  $(X, d)$  se denota como  $Isom(X, d)$  o simplemente como  $Isom(X)$  cuando se sobreentiende la métrica utilizada.

**Teorema 2.2.** El conjunto  $Isom(X)$  forma un grupo bajo la composición de aplicaciones.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio métrico con  $d$  la métrica asociada. Notemos que la composición de aplicaciones es siempre asociativa, y que la aplicación identidad  $Id : X \rightarrow X : x \mapsto Id(x) = x$ ,  $\forall x \in X$ , es claramente una isometría.

Consideremos  $u \in Isom(X)$  y recordemos que las aplicaciones biyectivas son aquellas que tienen inversa, luego existe  $u^{-1} : X \rightarrow X$  tal que  $uu^{-1} = Id = u^{-1}u$ . Además,  $\forall x, y \in X$ :

$$d(u^{-1}(x), u^{-1}(y)) = d(uu^{-1}(x), uu^{-1}(y)) = d(Id(x), Id(y)) = d(x, y).$$

Por lo tanto,  $u^{-1} \in Isom(X)$ .

Para finalizar, consideremos  $u, v \in Isom(X)$ . La composición  $uv : X \rightarrow X$  es biyectiva, pues  $v^{-1}u^{-1}$  es su inversa. Además,  $\forall x, y \in X$ :

$$d(uv(x), uv(y)) = d(u^{-1}uv(x), u^{-1}uv(y)) = d(v(x), v(y)) = d(v^{-1}v(x), v^{-1}v(y)) = d(x, y).$$

Por lo tanto,  $uv \in Isom(X)$ . □

**Ejemplo 2.3.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico discreto, veamos cómo es su grupo de isometrías:

*Por definición, toda isometría es una biyección. Comprobemos que, en este caso, toda biyección es una isometría, viendo para ello que toda biyección  $u : X \rightarrow X$  preserva la distancia:*

Sean  $x, y \in X$ ,

- Si  $x = y \Rightarrow u(x) = u(y) \Rightarrow d(u(x), u(y)) = 0 = d(x, y)$ .
- Si  $x \neq y \Rightarrow u(x) \neq u(y) \Rightarrow d(u(x), u(y)) = 1 = d(x, y)$ .

Por lo tanto,  $Isom(X)$  es el grupo formado por todas las biyecciones (permutaciones) de  $X$  en sí mismo, que es justamente lo que se conoce como **grupo simétrico**. Si  $X$  es finito, y  $|X| = n \in \mathbb{N}$ ,  $Isom(X) = S_n$ , grupo simétrico de orden  $n$  con  $n!$  elementos.

**Definición 2.4.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $F$  un subconjunto de  $X$ . Una **simetría** de  $F$  es una isometría de  $X$  que fija  $F$  como conjunto. El conjunto de todas las simetrías de  $F$  viene dado por:

$$Sym(F) = \{u \in Isom(X) \mid u(F) = F\}.$$

**Teorema 2.5.** Para cualquier subconjunto  $F$  de un espacio métrico  $X$ ,  $Sym(F)$  es un subgrupo de  $Isom(X)$ .

*Demostración.* Por definición,  $Sym(F) \subseteq Isom(X)$ . Además,  $Id(F) = F$ , y si  $u, v \in Sym(F)$ :

- $F = u(F) \Rightarrow u^{-1}(F) = u^{-1}u(F) = Id(F) = F$ ,
- $v(F) = F \Rightarrow uv(F) = u(F) = F$ .

□

## 2.1. Isometrías de la recta real

En este apartado vamos a realizar un análisis completo del grupo de isometrías de la recta real con la métrica euclídea, describiendo sus elementos y su estructura.

Consideramos  $G = Isom(\mathbb{R}, d)$ , con  $d$  la métrica usual en  $\mathbb{R}$ . Sea  $u \in G$ , suponemos que  $u(0) = c \in \mathbb{R}$ , y consideramos la aplicación  $t_c$  dada por:

$$t_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + c. \quad (2.1)$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Notemos que  $t_c$  es suprayectiva e inyectiva ( $t_c(x) = t_c(y) \Rightarrow x = y$ ), luego es una biyección, y además preserva la distancia:

$$d(t_c(x), t_c(y)) = d(x + c, y + c) = |(x + c) - (y + c)| = |x - y| = d(x, y).$$

Por lo tanto,  $t_c \in G$  y como  $G$  es grupo,  $t_c^{-1} \in G$  y la composición  $v = t_c^{-1}u \in G$ . Sabemos que  $t_c(0) = c$ , luego  $t_c^{-1}(c) = 0$ , y se tiene que:

$$v(0) = t_c^{-1}u(0) = t_c^{-1}(c) = 0,$$

es decir,  $v$  fija el 0, con lo cual,  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ,

$$|x| = d(0, x) = d(v(0), v(x)) = d(0, v(x)) = |v(x)| \Rightarrow v(x) = \pm x.$$

En particular,  $v(1) = (-1)^\varepsilon$ , con  $\varepsilon = 0$  ó  $1$ .

- **Caso  $\varepsilon = 0$ :**  $v(1) = 1$ ;  $v(0) = 0$ ;  $v(x) = \pm x \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ .

Veamos que  $v(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$ : Suponemos, por reducción al absurdo, que  $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , tal que  $v(x) = -x$ , luego

$$|x - 1| = d(1, x) = d(v(1), v(x)) = d(1, -x) = |x + 1|.$$

Entonces,  $(x - 1) = \pm(x + 1)$ , que da lugar a  $-1 = +1$  o a  $x = 0$ . En cualquier caso llegamos a una contradicción. En consecuencia,  $v = t_c^{-1}u = Id$ , de donde obtenemos  $u = t_c$ .

- **Caso  $\varepsilon = 1$ :**  $v(1) = -1$ ;  $v(0) = 0$ ;  $v(x) = \pm x \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ .

Veamos que  $v(x) = -x \forall x \in \mathbb{R}$ : Suponemos, por reducción al absurdo, que  $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , tal que  $v(x) = x$ , luego

$$|x - 1| = d(1, x) = d(v(1), v(x)) = d(-1, x) = |x + 1|,$$

que nos lleva a las mismas contradicciones que en el caso anterior. En consecuencia,  $v = r_0$  con:

$$r_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x, \quad (2.2)$$

que es claramente una isometría. Entonces  $v = t_c^{-1}u = r_0$ , de donde  $\mathbf{u} = \mathbf{t}_c \mathbf{r}_0$  con:

$$t_c r_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x + c. \quad (2.3)$$

Acabamos de mostrar que toda isometría arbitraria  $u$  de  $\mathbb{R}$  puede escribirse como  $u = t_c r_0^\varepsilon$  con  $c \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ . Veamos que esta descomposición es única: suponemos que  $u = t_c r_0^\varepsilon = t_d r_0^\delta$ , con  $c, d \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$ , de donde  $t_d^{-1} t_c = r_0^\delta r_0^{-\varepsilon}$  y como  $t_d^{-1} = t_{-d}$ ,  $t_{c-d} = r_0^{\delta-\varepsilon}$ , luego necesariamente  $c - d = \delta - \varepsilon = 0$ , por lo que  $c = d$  y  $\delta = \varepsilon$ .

**Teorema 2.6.** *Toda isometría  $u \in G$  admite una factorización única de la forma*

$$u = t_c r_0^\varepsilon \quad (2.4)$$

con  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = 0$  ó  $1$ , y  $t_c$  y  $r_0$  las aplicaciones descritas previamente (en (2.1) y (2.2)). Esta descomposición es lo que se conoce como **forma normal** de los elementos de  $G$ .  $\square$

Para completar la descripción de  $G$ , nos falta ver la regla de composición entre elementos. Sean  $u, v \in G$ , podemos escribirlos de la forma:

$$u = t_c r_0^\varepsilon, \quad v = t_d r_0^\delta,$$

con  $c, d \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$ . Así, la composición de  $u$  y  $v$  viene dada por:

$$uv = t_c r_0^\varepsilon t_d r_0^\delta.$$

Para poner en forma normal la parte derecha de la ecuación anterior, consideramos dos casos:

- Caso  $\varepsilon = 0$ :  $uv = t_c t_d r_0^\delta$ .

De (2.1) se sigue que

$$t_c t_d = t_{c+d}, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

y por lo tanto  $uv = t_{c+d} r_0^\delta$  en este caso.

- Caso  $\varepsilon = 1$ :  $uv = t_c r_0 t_d r_0^\delta$ .

Observemos que de (2.2) y (2.3) se tiene que  $r_0^2 = (t_d r_0)^2 = Id$ , luego  $r_0 t_d = t_d^{-1} r_0^{-1} = t_{-d} r_0$  y por tanto  $uv = t_{c-d} r_0^{\delta+1}$  en este caso.

Combinando los dos casos concluimos que la composición en  $G$  viene dada por la fórmula:

$$uv = t_{c+(-1)^\varepsilon d} r_0^{\delta+\varepsilon}. \quad (2.6)$$

A continuación vamos a analizar con más detalle cada uno de los elementos de  $G$ , a partir de su forma normal dada por (2.4):

- Caso  $\varepsilon = 0$ :  $u = t_c$  dada por (2.1).

- Si  $c = 0$ ,  $u = Id$ .
- Si  $c \neq 0$ ,  $u$  mueve cada punto  $x \in \mathbb{R}$  la misma distancia,  $|c|$ , a la derecha o a la izquierda según  $c$  sea positivo o negativo, luego  $u$  es una **traslación**. Algunas propiedades de las traslaciones son las siguientes:
  - $t_c$  preserva el orden (OP):  $x < y \Rightarrow t_c(x) < t_c(y)$ ,
  - $t_c$  no tiene puntos fijos:  $t_c(x) \neq x \ \forall x \in \mathbb{R}$ , excepto si  $c = 0$ ,
  - $t_c$  es aperiódica:  $t_c^n \neq Id \ \forall n \in \mathbb{N}$ , excepto si  $c = 0$ .

Destacamos otra propiedad importante que se sigue de (2.5): el subconjunto

$$T = \{t_c \mid c \in \mathbb{R}\} \quad (2.7)$$

forma un grupo y por lo tanto es un subgrupo de  $G$ .

- Caso  $\varepsilon = 1$ :  $u = t_c r_0$  dada por (2.3).

Observemos que la media aritmética de cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y su imagen  $u(x) = -x + c$ , es la constante  $c/2$ , es decir,  $u$  mueve cada punto  $x \in \mathbb{R}$  al punto distinto de  $x$  que se encuentra a la misma distancia de  $c/2$  que  $x$ . Por lo tanto,  $u$  es una **simetría central** con centro de simetría  $c/2$ , a la cual denotaremos por  $r_{c/2}$ . Algunas propiedades de las simetrías centrales son las siguientes:

- $r_{c/2}$  revierte el orden (OR):  $x < y \Rightarrow r_{c/2}(x) > r_{c/2}(y)$ ,
- $r_{c/2}$  tiene un punto fijo:  $r_{c/2}(x) = x$  cuando  $x = c/2$ ,
- $r_{c/2}$  es periódica:  $r_{c/2}^2 = Id$ .

Algunas diferencias respecto a las traslaciones:

- Dado que  $t_c r_0 t_d r_0 = t_c t_{-d} r_0^2 = t_{c-d}$ , el conjunto

$$\{t_c r_0 \mid c \in \mathbb{R}\} = T r_0 \quad (2.8)$$

no forma un grupo, pero se tiene que

$$T \cap T r_0 = \emptyset, \quad T \sqcup T r_0 = G. \quad (2.9)$$

Luego  $T r_0$  es una coclase a derecha del subgrupo  $T$  en  $G$ .

Haciendo referencia a la propiedad de ser OP u OR utilizamos la notación  $T = G^+$ ,  $T r_0 = G^-$ .

- $t_c t_d = t_{c+d} = t_d t_c$ , mientras que, excepto cuando  $c = d$ ,  $r_c r_d = t_{2(c-d)} \neq t_{2(d-c)} = r_d r_c$ . Con lo cual,  $T$  es subgrupo abeliano mientras que  $G$  es grupo no abeliano.
- La conjugación de una traslación o una simetría central por una isometría arbitraria  $u \in G$  viene dada por:

$$u t_c u^{-1} = t_{(-1)^\varepsilon c}, \quad u r_c u^{-1} = r_{u(c)}, \quad (2.10)$$

donde  $\varepsilon = 0$  ó  $1$  según  $u$  es OP u OR.



Para finalizar este apartado vamos a ver el siguiente ejemplo que consiste en determinar el subgrupo  $H = \text{Sym}(\mathbb{Z})$  del grupo  $G = \text{Isom}(\mathbb{R})$  ya estudiado:

**Ejemplo 2.7.** *Cálculo de  $H = \text{Sym}(\mathbb{Z})$ :*

Sea  $u \in H$ . Necesariamente  $u(0) = n \in \mathbb{Z}$  y por (2.4)  $u = t_c r_0^\varepsilon$  con  $c \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon = 0$  ó  $1$ . Como  $r_0^2 = \text{Id}$ ,  $ur_0^\varepsilon = t_c$  y se tiene que:

$$c = t_c(0) = ur_0^\varepsilon(0) = u(0) = n.$$

Luego los elementos de  $H$  son de la forma  $u = t_n r_0^\varepsilon$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Notemos que  $u$  está bien definida ya que  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,

$$u(m) = t_n r_0^\varepsilon(m) = t_n((-1)^\varepsilon m) = n + (-1)^\varepsilon m \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto,  $H = \{t_n r_0^\varepsilon \mid n \in \mathbb{Z}, \varepsilon = 0 \text{ ó } 1\}$ . Más aún, de (2.5) se deduce que:

$$t_n = \underbrace{t_1 t_1 \cdots t_1}_{n \text{ veces}} = t_1^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Con lo cual, toda  $u \in H$  se puede expresar en términos de solo dos elementos,  $t_1$  y  $r_0$ . Además,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  se cumplen las siguientes relaciones:

$$t_1^n t_1^m = t_1^{n+m}, \quad r_0^2 = \text{Id}, \quad r_0 t_1^n r_0^{-1} = t_1^{-n},$$

todas ellas consecuencias de las dos siguientes:

$$r_0^2 = \text{Id}, \quad r_0 t_1 r_0^{-1} = t_1^{-1}.$$

Por lo tanto, lo anterior lo podemos denotar así:  $H = \langle r_0, t_1 \mid r_0^2 = \text{Id}, r_0 t_1 r_0^{-1} = t_1^{-1} \rangle$ . Es decir,  $H$  está generado por  $r_0$  y  $t_1$ , cumpliéndose las relaciones  $r_0^2 = \text{Id}$ ,  $r_0 t_1 r_0^{-1} = t_1^{-1}$ . A  $H$  se le llama **grupo diédrico infinito**, y es denotado por  $D_\infty$ .

## 2.2. Isometrías del plano real

En este apartado vamos a estudiar lo que se conoce como el Grupo Euclídeo del plano,  $\mathbb{E} = \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$ , con  $d$  la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ .

Comenzaremos viendo una serie de propiedades generales de las isometrías de  $\mathbb{R}^2$ , pasando de ahí a describir 3 de los tipos básicos de isometrías existentes: traslaciones, giros y simetrías axiales. Además veremos que toda isometría de  $\mathbb{R}^2$  puede expresarse como producto de las 3 anteriores, dando lugar al teorema de la forma normal. Y para acabar de describir el grupo, estudiaremos la composición entre elementos de  $\mathbb{E}$  escritos en sus formas normales, y veremos cómo componer simetrías axiales de ejes distintos.

### 2.2.1. Propiedades generales

**Definición 2.8.** Tres puntos  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  no colineales determinan 3 rectas distintas, cada una de las cuales divide  $\mathbb{R}^2$  en dos semiplanos, de forma que las 3 conjuntamente lo dividen en 7 regiones, de las cuales 6 no están acotadas. La región acotada es a lo que llamamos **triángulo**, al cual denotamos por  $\Delta ABC$ . El  $\Delta ABC$  tiene tres **lados**,  $AB, BC$  y  $CA$ , y 3 **ángulos** interiores,  $\widehat{BCA}$ ,  $\widehat{CAB}$  y  $\widehat{ABC}$ . Los puntos  $A, B$  y  $C$  se llaman **vértices**, y su disposición determina una **orientación** del  $\Delta ABC$ , que se considera positiva si aparecen consecutivamente en orden antihorario y negativa en caso contrario.

**Definición 2.9.** Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  se dice que son **congruentes** si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma amplitud, es decir si:

$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad |CA| = |C'A'|, \\ B\hat{C}A = B'\hat{C}'A', \quad C\hat{A}B = C'\hat{A}'B', \quad A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'.$$

De los siguientes dos teoremas se han omitido las demostraciones (no son elementales).

**Teorema 2.10.** Cualquier isometría de  $\mathbb{R}^2$

- (i) transforma un triángulo en otro congruente,
- (ii) preserva ángulos,
- (iii) transforma rectas en rectas.

**Teorema 2.11.** Una isometría de  $\mathbb{R}^2$  es determinada por su efecto sobre cualesquiera 3 puntos no colineales.

### 2.2.2. Tipos básicos de isometrías en $\mathbb{R}^2$

**Definición 2.12.** Una **traslación**  $t_{\bar{a}}$  de vector  $\bar{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ , es una aplicación que, a cada punto  $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  (en coordenadas cartesianas), le hace corresponder el punto  $t_{\bar{a}}(P)$  de coordenadas cartesianas  $(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ . Es decir,

$$t_{\bar{a}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2).$$

*Propiedades básicas de las traslaciones:*

- preservan la orientación (OP):

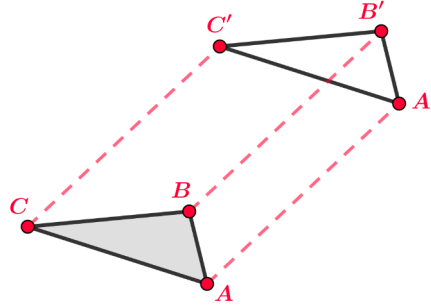


Figura 1: Traslación de vector  $\overline{AA'}$

- excepto si  $\bar{a} = (0,0)$ ,  $t_{\bar{a}}$  no tiene puntos fijos,
- $t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\overline{a+b}}$ , siendo el símbolo  $+$  la adición vectorial componente a componente.

De la última de las propiedades se sigue que el conjunto de todas las traslaciones forma un subgrupo en  $\mathbb{E}$ , al que denotamos por  $\mathbb{T}$ .

Consideramos ahora para cada punto  $P \in \mathbb{R}^2$  su expresión en coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  respecto a un punto fijo  $O \in \mathbb{R}^2$ , y a una recta fija  $l \in \mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.13.** Un **giro**  $s_{(O,\alpha)}$  de centro  $O$  y amplitud  $\alpha \in \mathbb{R}$  módulo  $2\pi$ , es una aplicación que, a cada punto  $P = (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$  (en coordenadas polares), le hace corresponder el punto  $s_{(O,\alpha)}(P)$  de coordenadas polares  $(\rho, \theta + \alpha)$  respecto de  $O$ . Es decir,

$$s_{(O,\alpha)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \alpha).$$

*Propiedades básicas de los giros:*

- preservan la orientación (OP):

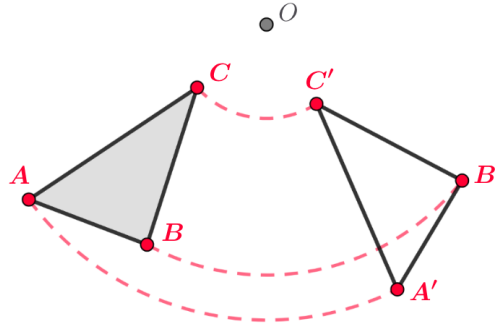


Figura 2: Giro de centro  $O$  y amplitud  $|\widehat{AÔA'}|$

- excepto si  $\alpha = 0$ ,  $s_{(O,\alpha)}$  tiene un único punto fijo ( $O$ ),
- $s_{(O,\alpha)}s_{(O,\beta)} = s_{(O,\alpha+\beta)}$ , siendo el símbolo  $+$  la adición en  $\mathbb{R}$  módulo  $2\pi$ .

De la última de las propiedades se sigue que el conjunto de todos los giros de centro  $O$  forma un subgrupo en  $\mathbb{E}$ , al que denotamos por  $\mathbb{S}_O$ .

**Definición 2.14.** Una **simetría axial**  $r_l$  de eje una recta fija  $l \in \mathbb{R}^2$ , es una aplicación que, a cada punto  $P \in \mathbb{R}^2$ , le hace corresponder el único punto  $r_l(P) \in \mathbb{R}^2$  que cumple ser el simétrico de  $P$  respecto a la recta  $l$ .

*Propiedades básicas de las simetrías:*

- revierten la orientación (OR):

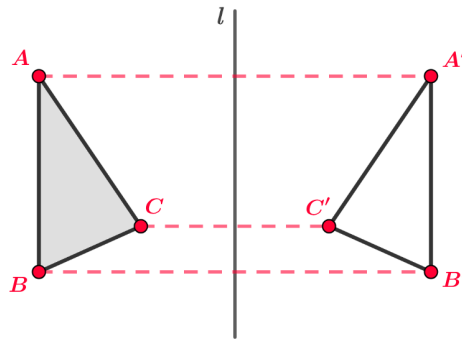


Figura 3: Simetría axial de eje  $l$

- fijan la recta  $l$  y cumplen que  $r_l^2 = Id$ .

La composición de simetrías axiales con ejes distintos la desarrollaremos en el apartado 2.2.5.

Cuando no haya lugar a confusión o no sea necesario, simplificaremos la notación denotando simplemente por  $t$  a una traslación  $t_{\bar{a}}$ , por  $s$  a un giro  $s_{(O,\alpha)}$  y por  $r$  a una simetría axial  $r_l$ .

### 2.2.3. Teorema de la forma normal

**Teorema 2.15.** *Fijamos un punto  $O \in \mathbb{R}^2$  y una recta  $l \in \mathbb{R}^2$  con  $O \in l$ . Entonces, cualquier elemento  $u \in \mathbb{E}$  puede escribirse de manera única en la forma*

$$u = tsr^\varepsilon$$

con  $t \in \mathbb{T}$ ,  $s \in \mathbb{S}_O$ ,  $r = r_l$  y  $\varepsilon = 0$  ó  $1$ . El subgrupo  $\mathbb{E}^+$  de isometrías OP de  $\mathbb{E}$  está formado por los elementos  $u$  con  $\varepsilon = 0$ .

*Demostración.* Sea  $u \in \mathbb{E}$  una isometría. Para probar la existencia de la forma normal de  $u$ , en primer lugar, consideramos  $t$  la traslación tal que  $t(O) = u(O)$ , de donde  $O = t^{-1}u(O)$ . Tomamos  $P$  un punto cualquiera en  $l$  con  $P \neq O$ . Como

$$0 \neq d(O, P) = d(t^{-1}u(O), t^{-1}u(P)) = d(O, t^{-1}u(P)),$$

existe un giro  $s \in \mathbb{S}_O$  tal que  $s(P) = t^{-1}u(P)$ . Entonces  $s^{-1}t^{-1}u$  fija  $P$ , y también  $O$ . Finalmente tomamos  $Q \notin l$  un punto cualquiera. Como  $d(O, Q) = d(s^{-1}t^{-1}u(O), s^{-1}t^{-1}u(Q)) = d(O, s^{-1}t^{-1}u(Q))$ , el punto  $s^{-1}t^{-1}u(Q)$  está en la circunferencia  $C_1$  de dentro  $O$  y radio  $d(O, Q)$ . De forma similar se tiene que  $s^{-1}t^{-1}u(Q)$  también está en la circunferencia  $C_2$  de dentro  $P$  y radio  $d(P, Q)$ . Por lo tanto,  $Q, s^{-1}t^{-1}u(Q) \in C_1 \cap C_2$ . Como  $C_1$  y  $C_2$  no son concéntricas, como mucho se intersecan en dos puntos. Entonces o  $Q = s^{-1}t^{-1}u(Q)$  o, en caso de que sean distintos,  $Q$  es el simétrico de  $s^{-1}t^{-1}u(Q)$  respecto de la recta  $l$ . Tomando  $\varepsilon = 0$  en el primer caso, y  $\varepsilon = 1$  en el segundo, la isometría  $r^\varepsilon s^{-1}t^{-1}u$  fija  $Q$ , y también  $O$  y  $P$ . Como por construcción,  $O, P$  y  $Q$  son no colineales, del Teorema 2.11 se sigue que  $r^\varepsilon s^{-1}t^{-1}u = Id$ , de donde  $u = tsr^\varepsilon$ .

Observemos que como  $t$  y  $s$  son OP y  $r$  es OR, la isometría  $tsr^\varepsilon$  es OP u OR según  $\varepsilon = 0$  ó  $1$  respectivamente, lo cual prueba lo enunciado en el teorema sobre el subgrupo  $\mathbb{E}^+$ .

Finalmente, para probar la unicidad de la forma normal asumamos que

$$tsr^\varepsilon = t's'r^\delta$$

con  $t, t' \in \mathbb{T}$ ,  $s, s' \in \mathbb{S}_O$  y  $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$ . Del párrafo anterior se sigue que  $\varepsilon = \delta$  y, cancelando  $r$  si es necesario, tenemos  $ts = t's'$ . Pero entonces  $(t')^{-1}t = s's^{-1} \in \mathbb{T} \cap \mathbb{S}_O$ , por lo que siendo una traslación que fija un punto, debe ser la aplicación identidad. Luego  $t = t'$  y  $s = s'$ .  $\square$

### 2.2.4. Composición y conjugación de isometrías

Del siguiente teorema no damos la demostración (no es elemental).

**Teorema 2.16.** *La composición de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  escritas en forma normal, viene dada por*

$$t_{\bar{b}}s_{(O,\beta)}r_l^\varepsilon \cdot t_{\bar{a}}s_{(O,\alpha)}r_l^\delta = t_{\bar{c}}s_{(O,\gamma)}r_l^\eta$$

con  $\bar{c} = \bar{b} + s_{(O,\beta)}r_l^\varepsilon(\bar{a})$ ,  $\gamma = \beta + (-1)^\varepsilon\alpha$ , y  $\eta = \varepsilon + \delta$ .

Como consecuencia de los Teoremas 2.15 y 2.16 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.17.** Sea  $r = r_l$  una simetría axial,  $s = s_{(O,\beta)}$  con  $O \in l$  un giro, y  $t_{\bar{a}}$  una traslación,

$$t_{\bar{a}}^r = t_{r(\bar{a})}, \quad t_{\bar{a}}^s = t_{s(\bar{a})}, \quad s^r = s_{(O,-\beta)}.$$

**Corolario 2.18.** El subgrupo de traslaciones  $\mathbb{T}$  es cerrado bajo conjugación en  $\mathbb{E}$ .

### 2.2.5. Composición de simetrías axiales

Dadas dos rectas  $l$  y  $l'$ , se define el ángulo formado por  $l$  y  $l'$  como el ángulo tomado de  $l$  a  $l'$  en sentido antihorario.

#### Dos simetrías axiales

Sean  $r_l$  y  $r_{l'}$  dos simetrías axiales. Descartamos el caso trivial  $r_l = r_{l'}$ , donde  $l = l'$  y  $r_l r_l = r_l^2 = Id$ , asumiendo  $l \neq l'$ . Distinguimos dos casos según si  $l$  y  $l'$  se cortan (en un punto  $O$ ) o no.

**Caso (i):**  $l \cap l' = \{O\}$  y ángulo formado por  $l$  y  $l'$  igual a  $\alpha$  con  $\alpha > 0$ .

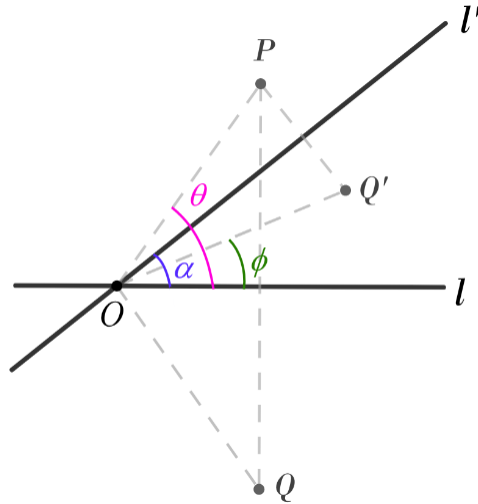


Figura 4: Dos simetrías axiales caso (i)

Considerando el sistema de coordenadas polares, con origen  $O$  y eje polar  $l$ , un punto arbitrario  $P = (\rho, \theta)$  es transformado por  $r_l$  en el punto  $Q = (\rho, -\theta)$ , mientras que  $r_{l'}$  transforma  $P$  en el punto  $Q' = (\rho, \phi)$  con  $\phi = \theta - 2(\theta - \alpha) = 2\alpha - \theta$ . Así,

$$r_{l'} r_l(\rho, \theta) = r_{l'}(\rho, -\theta) = (\rho, 2\alpha + \theta).$$

Por lo tanto, la composición  $r_{l'} r_l$  fija la distancia de los puntos a  $O$  e incrementa el ángulo polar en  $2\alpha$ . Es decir,  $r_{l'} r_l = s_{(O, 2\alpha)}$ .

**Caso (ii):**  $l \parallel l'$  y distancia entre  $l$  y  $l'$  igual a  $a$  con  $a > 0$ .

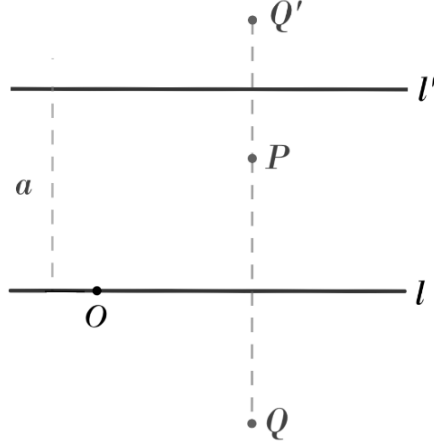


Figura 5: Dos simetrías axiales caso (ii)

Considerando el sistema de coordenadas cartesianas, con origen  $O$  y eje de abscisas  $l$ , un punto arbitrario  $P = (x, y)$  es transformado por  $r_l$  en el punto  $Q = (x, -y)$ , mientras que  $r_{l'}$  transforma  $P$  en el punto  $Q' = (x, 2a - y)$ . Así,

$$r_{l'}r_l(x, y) = r_{l'}(x, -y) = (x, 2a + y).$$

Por lo tanto, la composición  $r_{l'}r_l$  fija la coordenada  $x$  de los puntos e incrementa la coordenada  $y$  en  $2a$ . Es decir,  $r_{l'}r_l = t_{(0, 2a)}$ .

**Teorema 2.19.** Dadas  $r_l$  y  $r_{l'}$  dos simetrías axiales en  $\mathbb{R}^2$ , su composición  $r_{l'}r_l$  es un giro o una traslación según si  $l$  y  $l'$  se cortan o no. En el primer caso, el centro de giro es el punto de intersección de las dos rectas, y el ángulo de giro es dos veces el que forman  $l$  y  $l'$ . En el segundo caso, el vector de traslación tiene la dirección de la recta perpendicular a  $l$  y  $l'$ , sentido el de  $l$  a  $l'$ , y módulo dos veces la distancia de  $l$  a  $l'$ .  $\square$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el recíproco:

**Teorema 2.20.** Cualquier giro o traslación de  $\mathbb{R}^2$  es el producto de dos simetrías axiales. Más concretamente,

$$s_{(O, \alpha)} = r_{l'}r_l,$$

con  $l$  y  $l'$  rectas que pasan por  $O$  y que forman un ángulo, medido de  $l$  a  $l'$ , igual a  $\alpha/2$ . También

$$t_{\vec{a}} = r_{l'}r_l,$$

con  $l$  y  $l'$  rectas perpendiculares a la dirección de  $\vec{a}$  y tales que la distancia entre ellas es la mitad del módulo de  $\vec{a}$ .  $\square$

### Tres simetrías axiales

Sean  $r_{l_1}$ ,  $r_{l_2}$  y  $r_{l_3}$  tres simetrías axiales. Distinguimos casos según el número total,  $n$ , de puntos de intersección de pares de rectas distintas de entre  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

Como dos rectas distintas tienen como mucho un punto en común,  $n \leq 3$ .

**Casos  $n = 0, 1$**  (incluyen los casos degenerados en los que dos o más de las rectas  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son la misma):

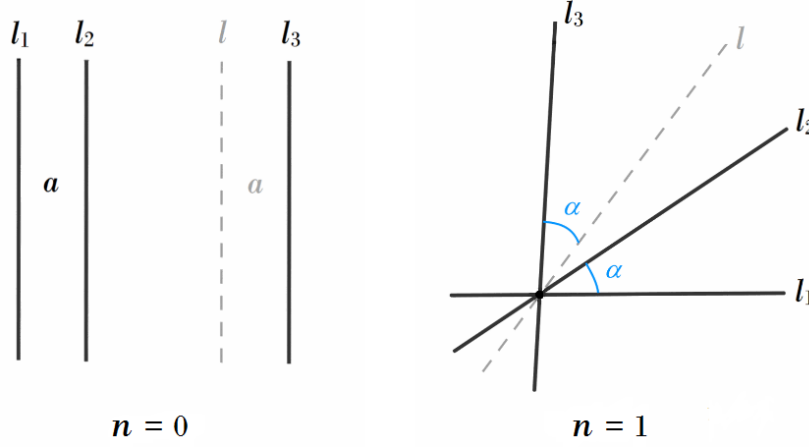


Figura 6: Tres simetrías axiales casos  $n = 0, 1$

Utilizando los Teoremas 2.19 y 2.20 elegimos, en cada caso,  $r_l$  tal que  $r_{l_2}r_{l_1} = r_{l_3}r_l$ . Teniendo en cuenta que  $r_{l_3}^2 = Id$ , en ambos casos se tiene por tanto que  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1} = r_l$  es de nuevo una simetría axial.

**Casos  $n = 2, 3$ :**

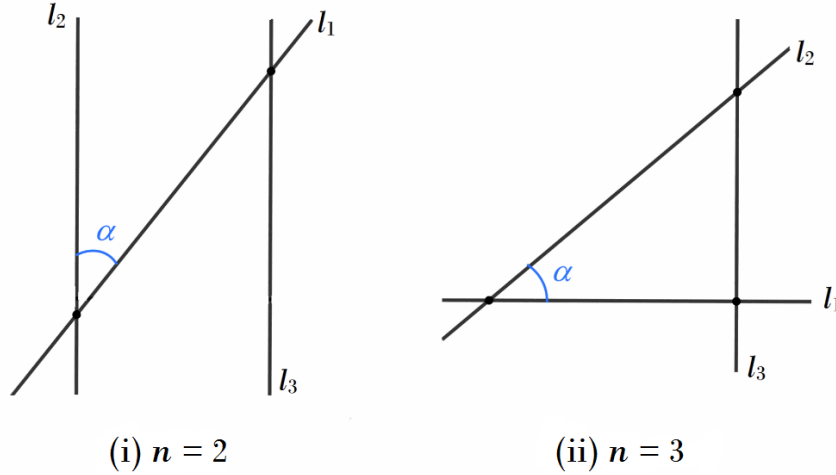
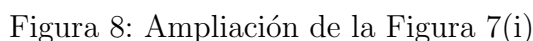


Figura 7: Tres simetrías axiales casos  $n = 2, 3$

Notemos que en el caso  $n = 3$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  pueden etiquetar los lados de un triángulo, que es único salvo permutaciones de sus lados. Observemos además que la Figura 7(ii) puede transformarse en la Figura 7(i) dejando fija  $l_3$  y rotando simultáneamente  $l_1$  y  $l_2$  alrededor de su punto de intersección. Esta operación no afecta al producto  $r_{l_2}r_{l_1}$ . Operaciones similares permiten convertir la Figura 7(i) en los otros dos subcasos,  $l_1 \parallel l_2$  y  $l_1 \parallel l_3$ , del caso  $n = 2$ . Por lo tanto, únicamente es necesario calcular  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$  en el caso  $n = 2$  de la Figura 7(i).

Comenzamos ampliando la Figura 7(i) en la Figura 8, donde  $\{O\} = l_1 \cap l_2$ ,  $\alpha$  es el ángulo formado por  $l_1$  y  $l_2$ ,  $a > 0$  es la distancia de  $l_2$  a  $l_3$ , y  $l$  es la recta perpendicular a  $l_2$  en  $O$ .



**Caso (i):**  $P \neq Q$ , y como  $a \neq 0$ ,  $O, P, Q$  son no colineales. Buscamos las imágenes  $O', P', Q'$  de  $O, P, Q$  bajo la isometría  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$ . En primer lugar, como  $O$  y  $Q$  son fijos por  $r_{l_1}$ ,  $O'$  y  $Q'$  son sus imágenes bajo la traslación  $r_{l_3}r_{l_2}$ , de vector de traslación  $2\overline{OP}$ . En segundo lugar, por el Teorema 2.10 los triángulos  $\triangle OPQ$  y  $\triangle O'P'Q'$  son congruentes. Luego hay dos candidatos para  $P'$ , bien el punto  $P''$  de coordenadas  $(3a, 0)$  o su simétrico respecto a  $l'_1$ , recta que pasa por  $O'$  y  $Q'$ . Pero como  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$  es OR,  $P'$  es el segundo candidato.

**Caso (ii):**  $P = Q$ , luego  $l_1 = l$  es perpendicular a  $l_2$  y  $l_3$ , y  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$  es una simetría axial de eje  $l$  seguida de la traslación  $r_{l_3}r_{l_2}$  ya comentada en el caso (i). Observemos que aplicar la simetría axial  $r_{l_1}$  y la traslación  $r_{l_3}r_{l_2}$  a un punto arbitrario  $(x, y)$ , no es más que, en el primer caso, cambiar su coordenada  $y$  de signo, y en el segundo caso sumar  $2a$  a su coordenada  $x$ , de forma que, tanto  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$  como  $r_{l_1}r_{l_3}r_{l_2}$  mandan un punto arbitrario  $(x, y)$  al punto  $(x + 2a, -y)$ . Por lo tanto,  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1} = r_{l_1}r_{l_3}r_{l_2}$ , y la situación es la misma que en el caso (i). Notemos que como  $a \neq 0$ , la isometría  $r_{l_3}r_{l_2}r_{l_1}$  no tiene puntos fijos, y no puede ser por tanto una simetría axial. Además es OR, por lo que tampoco es ni un giro ni una traslación. Se trata de un tipo de isometría de  $\mathbb{R}^2$ , diferente de los tipos básicos vistos en 2.2.2.

$$q(P, P') = t_{\overline{PP'}}r_l$$

**Teorema 2.22.** *El producto de tres simetrías axiales en  $\mathbb{E}$  es una simetría axial o una simetría axial con traslación según si el número de puntos de intersección de los distintos ejes es menor o mayor que  $3/2$ .*  $\square$



### Cuatro o más

Consideremos en primer lugar la composición  $u$  de cuatro simetrías axiales. Por el Teorema 2.19,  $u$  es la composición de dos traslaciones, dos giros o uno de cada. La primera posibilidad da lugar de nuevo a una traslación (visto en la Definición 2.12). Veamos por tanto qué ocurre con los otros dos casos posibles. Tomamos  $u = t_{\bar{a}}s_{(O,\alpha)}$  asumiendo  $t_{\bar{a}}$  y  $s_{(O,\alpha)}$  no triviales, y construimos la siguiente figura:

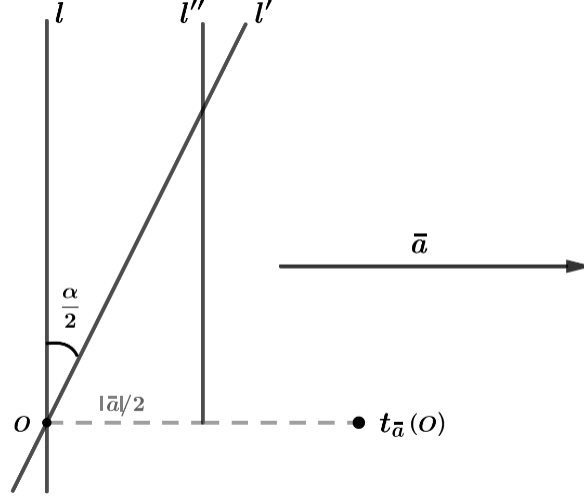


Figura 9: Composición de un giro con una traslación

donde:  $l$  es la recta perpendicular a la dirección de  $\bar{a}$  por  $O$ ,  $l'$  es la recta que pasa por  $O$  y que forma un ángulo de amplitud  $\alpha/2$  con  $l$ , y  $l''$  es la paralela a  $l$  por el punto medio de  $O$  y  $t_{\bar{a}}(O)$ . Entonces, por el Teorema 2.20,

$$s_{(O,\alpha)} = r_l r_{l'}, \quad t_{\bar{a}} = r_{l''} r_l,$$

de donde  $u = t_{\bar{a}}s_{(O,\alpha)} = r_{l''}r_{l'}$ . Aplicando el Teorema 2.19 se tiene que  $u$  en este caso es un giro.

Para el caso  $u = s_{(O,\alpha)}t_{\bar{a}}$ , basta observar que, por el caso anterior,  $u^{-1} = t_{\bar{a}}^{-1}s_{(O,-\alpha)}$  es un giro, luego  $u$  también lo es.

Finalmente consideramos el caso  $u = s_{(O',\alpha')}s_{(O,\alpha)}$  asumiendo  $O \neq O'$ , y definimos las siguientes tres rectas en  $\mathbb{R}^2$ :  $l$  es la recta que pasa por  $O$  y  $O'$ ,  $l'$  es la recta que pasa por  $O$  y que forma un ángulo de amplitud  $\alpha/2$  con  $l$ , y  $l''$  es la recta que pasa por  $O'$  y tal que el ángulo de  $l$  a  $l''$  es  $\alpha'/2$ . Entonces, por el Teorema 2.20,

$$s_{(O,\alpha)} = r_l r_{l'}, \quad s_{(O',\alpha')} = r_{l''} r_l,$$

de donde  $u = s_{(O',\alpha')}s_{(O,\alpha)} = r_{l''}r_{l'}$  como antes. Sin embargo, ahora existen dos casos según si  $l'$  y  $l''$  son paralelas o no. En el primer caso (Figura 10(i)), la composición es una traslación, hecho que ocurre cuando  $\alpha' = -\alpha$  módulo  $2\pi$ . En el segundo caso (Figura 10(ii)), la composición es el giro  $s_{(P,2\phi)}$ , con  $P = l' \cap l''$  y  $2\phi = \alpha + \alpha'$ .

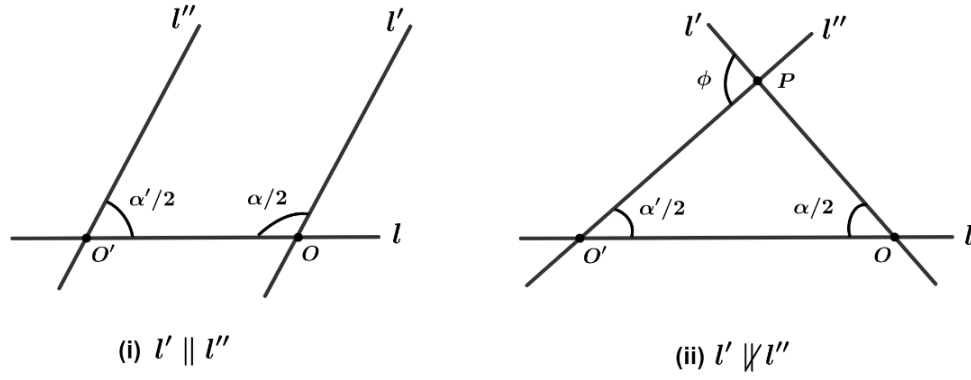


Figura 10: Composición de dos giros de distinto centro

En resumen, la composición de cuatro simetrías axiales en  $\mathbb{E}$ , que como hemos visto, en realidad se reduce a la composición de otras dos simetrías axiales, es una traslación o un giro. La composición de  $m$  simetrías axiales, con  $m \geq 4$ , es en realidad la composición de  $m - 2$ , y por una sencilla inducción, se tiene que finalmente es la composición de como mucho tres. Por lo tanto, hemos examinado la composición de  $m$  simetrías axiales para todo valor de  $m$ .

Además, los Teoremas 2.15 y 2.20 nos permiten decir que toda isometría de  $\mathbb{R}^2$  es la composición de, como mucho, cinco simetrías axiales, lo cual unido a lo anterior prueba el siguiente teorema.

**Teorema 2.23.** *Toda isometría no trivial de  $\mathbb{R}^2$  es la composición de, como mucho, tres simetrías axiales, y es un giro, una traslación, una simetría axial o una simetría axial con traslación. Estos cuatro tipos de isometrías se caracterizan en función de si tienen o no puntos fijos y si preservan o revierten la orientación.*

Puntos fijos	Sí	No
OP	giro	traslación
OR	simetría axial	simetría axial con traslación

Tabla 1: Caracterización de las isometrías del plano

□

### 3. Un paseo por la teoría básica de grupos

Esta sección tiene como objetivo la mejor comprensión lectora de las secciones que le siguen. Está dedicada a exponer una serie de nociones referentes a la teoría básica de grupos que van a ir apareciendo posteriormente.

En primer lugar, vamos a añadir más conceptos y resultados a los ya introducidos en la sección 1 acerca de este tema. Posteriormente, haremos una breve introducción a la teoría de generadores y relaciones, un tema que a priori puede parecer sencillo pero que tiene su complicación.

#### 3.1. Conceptos y resultados básicos

**Definición 3.1.** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos. Un **isomorfismo** entre ellos es una aplicación biyectiva  $\phi : G \mapsto H$  tal que:

$$\phi(a \cdot_G b) = \phi(a) \cdot_H \phi(b) \quad \forall a, b \in G, \quad (3.1)$$

donde  $\cdot_G$  y  $\cdot_H$  representan las operaciones binarias en  $G$  y  $H$  respectivamente. Cuando una tal  $\phi$  exista, escribiremos  $G \cong H$ , y diremos que  $G$  es **isomorfo** a  $H$ .

**Ejemplo 3.2.**  $(\mathbb{R}^2, +) \cong (\mathbb{C}, +)$ :

Basta considerar la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto x + iy,$$

que es una biyección que satisface la condición (3.1) en versión aditiva.

**Ejemplo 3.3.**  $(\mathbb{R}^2, +) \cong \mathbb{T}$ , con  $\mathbb{T}$  el subgrupo de traslaciones de  $\mathbb{E}$ :

Basta considerar la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}, \quad \bar{a} \mapsto t_{\bar{a}},$$

que es una biyección que satisface (3.1) ya que:  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(\bar{a} + \bar{b}) = \phi(\overline{a + b}) = t_{\overline{a + b}} = t_{\bar{a}} t_{\bar{b}} = \phi(\bar{a}) \phi(\bar{b})$ .

**Ejemplo 3.4.**  $\mathbb{R}$  con la suma módulo  $2\pi$  es isomorfo a  $\mathbb{S}_O$ , con  $\mathbb{S}_O$  el subgrupo de  $\mathbb{E}$  de giros de centro  $O$ :

Basta considerar la aplicación

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_O, \quad \alpha \mapsto s_{(O, \alpha)},$$

que es una biyección que satisface (3.1) ya que:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \phi(\alpha + \beta) = s_{(O, \alpha + \beta)} = s_{(O, \alpha)} s_{(O, \beta)} = \phi(\alpha) \phi(\beta)$ .

**Definición 3.5.** Un isomorfismo de un grupo  $G$  en sí mismo se dice **automorfismo** de  $G$ .

**Ejemplo 3.6.** Sea  $G$  un grupo. Consideramos la conjugación en  $G$  por un elemento  $x \in G$ :

$$\gamma_x : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^x = xgx^{-1}.$$

Es fácil comprobar que  $\gamma_{x^{-1}}$  es la inversa de  $\gamma_x$ , luego  $\gamma_x$  es biyectiva, y además cumple (3.1):

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad \gamma_x(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^x = x g_1 g_2 x^{-1} = x g_1 x^{-1} x g_2 x^{-1} = g_1^x g_2^x = \gamma_x(g_1) \gamma_x(g_2).$$

Por lo tanto,  $\gamma_x$  es un automorfismo de  $G$ , llamado **automorfismo interno**. El conjunto de todos estos automorfismos es denotado por  $\text{Inn}(G)$ .

**Teorema 3.7.** El conjunto  $\text{Aut}(G)$  de automorfismos de un grupo  $G$ , forma un grupo bajo la composición de aplicaciones.

**Ejemplo 3.8.** Consideramos la aplicación

$$\gamma : G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad x \mapsto \gamma_x, \quad (3.2)$$

con  $\gamma_x$  el automorfismo interno. Es sencillo comprobar que  $\gamma$  verifica (3.1), pero en general no es biyectiva (falla la suprayectividad). A este tipo de aplicaciones se les llama **homomorfismo de grupos**.

**Definición 3.9.** Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  se dice **normal** y se denota  $H \trianglelefteq G$  si  $\forall g \in G$ ,  $Hg = gH$ , o equivalentemente  $H^g \subset H$ .

**Proposición 3.10.** Sean  $G, H$  grupos y  $\phi : G \rightarrow H$  un homomorfismo. Se tiene que:

- (i)  $\text{Ker } \phi = \{g \in G \mid \phi(g) = 1\} \trianglelefteq G$ ,
- (ii)  $\text{Im } \phi = \{h \in H \mid \exists g \in G : \phi(g) = h\} \leq H$ .

**Ejemplo 3.11.** Consideramos el homomorfismo  $\gamma$  dado por (3.2) y calculamos su núcleo y su imagen:

- $\text{Im } \gamma = \text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$ ,
- $\text{Ker } \gamma = \{z \in G \mid gz = zg \ \forall g \in G\} \trianglelefteq G$ .

Observemos que  $\text{Ker } \gamma$  es el subgrupo formado por todos los elementos de  $G$  que conmutan con cualquier elemento de  $G$ . A este subgrupo se le llama **centro** de  $G$  y es denotado por  $Z(G)$ .

**Proposición 3.12.** La intersección de una colección arbitraria de subgrupos de un grupo es nuevamente un subgrupo.

**Definición 3.13.** Dados un grupo  $G$  y un subconjunto  $X \subseteq G$ , se define el **subgrupo generado por  $X$**  como la intersección de todos los subgrupos de  $G$  que contienen a  $X$ :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H.$$

Por construcción, el subgrupo anterior es el subgrupo más pequeño de  $G$  que contiene a  $X$ .

**Definición 3.14.** Si  $X \subseteq G$ ,  $X \neq \emptyset$ , una **palabra** en  $X$  es una expresión de la forma

$$w = x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_n^{z_n},$$

con  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Proposición 3.15.** Dados  $G$  un grupo y  $X \subseteq G$ ,  $X \neq \emptyset$ , se tiene:

$$\langle X \rangle = \{x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_n^{z_n} \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ejemplo 3.16.** Sea  $C = \{[x, y] \mid x, y \in G\}$  el conjunto formado por todos los conmutadores de un grupo  $G$  (ver Definición 1.6). El subgrupo generado por  $C$ ,  $\langle C \rangle$ , recibe el nombre de **grupo derivado** o subgrupo conmutador de  $G$ , y es denotado por  $G'$ .

**Ejemplo 3.17.** Sean  $G$  un grupo y  $x \in G$ . Se llama subgrupo generado por  $x$ , y se denota por  $\langle x \rangle$ , al subgrupo generado por  $X = \{x\} \subseteq G$ . A los grupos generados por un solo elemento se les conoce como **grupos cíclicos**. De la Proposición 3.15 se sigue que:  $\langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  si usamos la notación multiplicativa para la operación del grupo, y  $\langle x \rangle = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$  si por el contrario usamos la notación aditiva para la operación del grupo (en este último caso la operación es forzosamente conmutativa).

**Definición 3.18.** Sea  $G$  un grupo y  $x \in G$ . Se define el **orden de  $x$** , denotado por  $|x|$ , como el menor entero positivo  $n$  tal que  $x^n = e$ , con  $e$  el elemento identidad de  $G$ . Si no existe tal  $n$ , se dice que  $x$  tiene orden infinito, y se considera que  $|x| = \infty$ .

**Proposición 3.19.** Si  $G = \langle x \rangle$  es un grupo cíclico,  $|G| = |x|$ . Además,  $G$  es isomorfo, o bien a  $\mathbb{Z}_n$ , grupo de los enteros módulo  $n$  bajo la adicción, o bien a  $\mathbb{Z}$ , grupo de los enteros bajo la adicción.

**Definición 3.20.** Sea  $G = \langle x \rangle$  un grupo cíclico. Según el orden de  $G$  se tiene:

- Si  $|x| = n \in \mathbb{N}$ ,  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ . En este caso,  $G$  se dice **grupo cíclico de orden  $n$**  y es denotado por  $\mathbb{Z}_n$ .
- Si  $|x| = \infty$ ,  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . En este caso,  $G$  se dice **grupo cíclico infinito** y es denotado por  $\mathbb{Z}$ .

**Definición 3.21.** Sean  $G$  un grupo y  $H \leq G$ , se define el **índice** de  $H$  en  $G$  como el cardinal del conjunto formado por todas las coclases a izquierda (ver Definición 1.8), y se denota por  $|G : H|$ .

**Teorema 3.22. (Lagrange)** Si  $H$  es un subgrupo de un grupo  $G$ , entonces:

$$|G| = |G : H| |H|.$$

**Teorema 3.23.** Si  $G$  es un grupo y  $H \trianglelefteq G$ , entonces el conjunto de coclases a izquierda de  $H$  en  $G$  es un grupo de orden  $|G : H|$  con el producto  $(xH)(yH) = (xy)H$ ,  $x, y \in G$ .

**Definición 3.24.** Al grupo del teorema anterior se le llama **grupo cociente** de  $G$  por  $H$  y se denota  $G/H$ .

**Ejemplo 3.25.** Sea  $G$  un grupo arbitrario y  $H$  el grupo derivado  $G'$ . Veamos en primer lugar dos propiedades de los conmutadores:

- 1) El inverso de un conmutador vuelve a ser un conmutador:  $\forall x, y \in G$ ,

$$[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x].$$

- 2) El conjugado de un conmutador vuelve a ser un conmutador:  $\forall x, y, z \in G$ ,

$$[x, y]^z = z[x, y]z^{-1} = z(xy x^{-1} y^{-1})z^{-1} = zxz^{-1}zyz^{-1}zx^{-1}z^{-1}zy^{-1}z^{-1} = x^z y^z (x^{-1})^z (y^{-1})^z = [x^z, y^z].$$

Veamos ahora que  $\forall g \in G, H^g \subset H$ : Sea  $h \in H$ . Por definición de  $H = G'$ ,  $h$  es el producto de conmutadores y de sus inversos, que por 1) se reduce a  $h = c_1 c_2 \cdots c_p$  con  $c_1, c_2, \dots, c_p$  conmutadores. Entonces:

$$ghg^{-1} = g(c_1 c_2 \cdots c_p)g^{-1} = (gc_1 g^{-1})(gc_2 g^{-1}) \cdots (gc_p g^{-1}) = c_1^g c_2^g \cdots c_p^g.$$

Ahora, por 2),  $ghg^{-1}$  se reduce a un producto de conmutadores, luego  $ghg^{-1} \in G' = H$ . Por lo tanto,  $G' \trianglelefteq G$ , y a  $G/G'$  se le llama **grupo cociente derivado** de  $G$ .

**Definición 3.26.** Sean  $H$  y  $K$  dos grupos. El conjunto  $H \times K = \{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$  con producto  $(h, k)(h', k') = (hh', kk')$  dado componente a componente, recibe el nombre de **producto directo** de  $H$  y  $K$ , y se denota  $H \times K$ .

**Proposición 3.27.** Sea  $G$  un grupo con  $H, K \trianglelefteq G$  tales que  $H \cap K = \{e\}$  y  $HK = G$ . Entonces  $G \cong H \times K$ .

**Definición 3.28.** Sean  $H$  y  $K$  grupos y  $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  un homomorfismo. El conjunto  $H \times K$  con producto  $(h, k)(h', k') = (h\alpha(k)(h'), kk')$ , recibe el nombre de **producto semidirecto** de  $H$  y  $K$  mediante  $\alpha$ , y se denota  $H \rtimes_{\alpha} K$ .

**Proposición 3.29.** Dado el producto semidirecto  $H \rtimes_{\alpha} K$ , se tiene que  $H \cong H_1 = H \times \{e\} = \{(h, e) \mid h \in H\} \trianglelefteq H \rtimes_{\alpha} K$ ,  $K \cong K_1 = \{e\} \times K = \{(e, k) \mid k \in K\} \leq H \rtimes_{\alpha} K$ ,  $H_1 \cap K_1 = \{(e, e)\}$  con  $(e, e)$  el elemento identidad de  $H \rtimes_{\alpha} K$ ,  $H_1 K_1 = H \rtimes_{\alpha} K$  y  $(e, k)(h, e)(e, k)^{-1} = (\alpha(k)(h), e) \forall h \in H, k \in K$ .

**Proposición 3.30.** Sea  $G$  un grupo con  $H, K \leq G$  tales que  $H \trianglelefteq G$ ,  $H \cap K = \{e\}$  y  $HK = G$ . Entonces  $G \cong H \rtimes_{\alpha} K$  con  $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H) : k \mapsto \alpha(k)$  tal que  $\alpha(k)(h) = khk^{-1} \in H$ .

**Ejemplo 3.31.** Consideramos los grupos  $\mathbb{Z}_2 \cong \langle x \rangle$  y  $\mathbb{Z}_3 \cong \langle y \rangle$ , con  $|x| = 2$  y  $|y| = 3$ . Vamos a construir todos los posibles productos semidirectos  $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2$ , siendo  $\alpha$  el homomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \\ 1 &\longmapsto \text{Id} \\ x &\longmapsto \alpha(x) : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ &\quad y \longmapsto y^x, \end{aligned}$$

con  $\alpha(x)$  el automorfismo conjugación por  $x$ .

Existen dos posibilidades:

- $\alpha(x)(y) = y$ , es decir,  $\alpha(x) = \text{Id}$ . En este caso obtenemos el producto directo  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ .
- $\alpha(x)(y) = y^2$ , de donde  $y^x = xyx^{-1} = y^2$ . Teniendo en cuenta que  $x^2 = 1$  e  $y^3 = 1$ , en este caso obtenemos el producto semidirecto  $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2 = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1, xyx^{-1} = y^2 \rangle$ . A este grupo se le conoce como **grupo diédrico de orden 6**, y es denotado por  $D_6$ .

## 3.2. Generadores y relaciones

**Definición 3.32.** Una **presentación** de un grupo  $G$  es una forma de definir  $G$  mediante la especificación de dos conjuntos:

- Un conjunto  $X \subseteq G$  tal que  $G = \langle X \rangle$ . A los elementos de  $X$  se les llama **generadores**.
- Un conjunto  $R$  formado por una serie de ecuaciones entre elementos de  $G$ , a partir de las cuales se puede obtener cualquier otra relación que tenga lugar entre los elementos del grupo. A los elementos de  $R$  se les llama **relaciones**.

Emplearemos la notación  $G = \langle X \mid R \rangle$ .

**Definición 3.33.** Sea  $G$  un grupo con presentación  $\langle X \mid R \rangle$ . Se define el **rango** de  $G$  como el número de generadores,  $|X|$ . Si  $R = \emptyset$ , diremos que  $G$  es el **grupo libre** generado por  $X$ .

Previamente a este apartado ya nos habían aparecido un par de ejemplos de presentaciones de grupos, una de ellas, la del grupo diédrico  $D_6$ , vista en el Ejemplo 3.31. Veamos algún ejemplo más.

**Ejemplo 3.34.**  $G = \langle \mid \rangle$  es el grupo generado por  $X = \emptyset$ , es decir, se trata del grupo trivial  $G = \{1\}$ .

**Ejemplo 3.35.**  $G = \langle x \mid \rangle$  es el grupo libre de rango 1, que es justamente el grupo cíclico infinito  $\mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 3.36.** El grupo cíclico de orden  $n$  puede escribirse de la forma  $Z_n = \langle x \mid x^n \rangle$ . Como pasa en este caso, en las relaciones en las que el segundo miembro de la igualdad sea el elemento identidad del grupo, suele omitirse la igualdad y el elemento identidad.

**Ejemplo 3.37.** Sea  $G = H \rtimes_{\alpha} K$  con  $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  dada por  $\alpha(k)(h) = h^k$  para cualesquiera  $h \in H$  y  $k \in K$ . Y sean:

- $\langle Y \mid S \rangle$  una presentación del grupo  $H$ ,
- $\langle X \mid R \rangle$  una presentación del grupo  $K$ .

Entonces,  $G$  puede presentarse de la forma:

$$G = \langle X, Y \mid R = 1, S = 1, Y^X = W(Y) \rangle, \quad (3.3)$$

con  $W(Y)$  el conjunto de palabras en  $Y$  obtenido al tomar, para cada  $x \in X$  y cada  $y \in Y$ , el elemento  $y^x$ .

**Proposición 3.38.** Cualquier grupo  $G$  tiene una presentación.

*Demostración.* Sea  $\mu : G \times G \rightarrow G$  la operación binaria en  $G$ . Basta tomar  $X = G$  y  $R = \{xy = \mu(x, y) \mid x, y \in G\}$  para tener  $G = \langle X \mid R \rangle$ , ya que las relaciones de  $R$  definen la tabla de multiplicación de  $G$ , la cual define el grupo.  $\square$

Para estudiar la unicidad nos vamos a centrar únicamente en presentaciones finitas, es decir, presentaciones donde los conjuntos  $X$  y  $R$  son finitos.

**Definición 3.39.** Sea  $\langle X \mid R \rangle$  una presentación finita de un grupo  $G$ , se llaman **transformaciones elementales de Tietze** a las cuatro operaciones siguientes:

- $R+$ : añadir una relación que sea consecuencia de las ya existentes.
- $X+$ : añadir un generador, junto con la nueva relación que lo defina.
- $R-$ : eliminar una relación que es consecuencia de las otras.
- $X-$ : eliminar un generador que aparece solo una vez en las relaciones, junto con la relación en la que está involucrado.

La aplicación de una de las transformaciones anteriores o bien de una secuencia finita de dichas transformaciones a la presentación de un grupo, da lugar a otra presentación del mismo grupo. Por lo tanto, un grupo puede tener varias presentaciones.

**Teorema 3.40.** Si  $\langle X \mid R \rangle$  y  $\langle Y \mid S \rangle$  son dos presentaciones finitas del mismo grupo  $G$ , entonces cada una de ellas puede obtenerse a partir de la otra aplicando una secuencia finita de transformaciones elementales de Tietze.





## 4. Subgrupos discretos del Grupo Euclídeo del plano

Esta sección junto con la siguiente están dedicadas a clasificar todos los subgrupos discretos  $G$  del Grupo Euclídeo  $\mathbb{E} = \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$  con  $d$  la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ , grupo ya introducido en el apartado 2.2. Esta clasificación la vamos a realizar en función del subgrupo  $G \cap \mathbb{T}$ , donde  $\mathbb{T}$  es el subgrupo de traslaciones de  $\mathbb{E}$ .

Comenzaremos definiendo los subgrupos discretos de  $\mathbb{E}$ . De ahí pasaremos a dar una serie de resultados sobre subgrupos discretos, para llegar a un teorema de clasificación, donde obtendremos tres posibilidades para el subgrupo  $G \cap \mathbb{T}$ . En esta sección analizaremos las dos primeras opciones, que corresponden a los subgrupos discretos cuyo subgrupo de traslaciones  $G \cap \mathbb{T}$  es trivial o cíclico infinito. Al final de esta sección, usando las técnicas introducidas, se obtendrá la clasificación de todos los subgrupos discretos del grupo  $G = \text{Isom}(\mathbb{R}, d)$ , con  $d$  la métrica usual en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 4.1.** Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $P \in \mathbb{R}^n$  es un **punto de acumulación** de  $S$  si toda bola abierta centrada en  $P$  contiene algún punto de  $S$  distinto de  $P$ .

**Definición 4.2.** Un subgrupo  $G$  de  $\mathbb{E}$  se dice **discreto** si para cualquier punto  $O \in \mathbb{R}^2$ , todo círculo centrado en  $O$  contiene solo un número finito de puntos de la órbita  $\text{Orb}_G(O) = \{g(O) \mid g \in G\}$ . Esto significa que el conjunto  $\text{Orb}_G(O)$  no tiene puntos de acumulación, es decir, para cualquier punto  $O \in \mathbb{R}^2$ , existe un círculo centrado en  $O$  que no contiene ningún punto del conjunto  $\text{Orb}_G(O)$ , excepto el propio  $O$ . Como consecuencia de esto, para todo punto  $O \in \mathbb{R}^2$  no fijo por  $G$ , existe un elemento en la órbita  $\text{Orb}_G(O)$  que se encuentra a mínima distancia positiva de  $O$ .

### 4.1. Teorema de Leonardo

En este apartado consideramos los subgrupos  $G \leq \mathbb{E}$  tales que  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ . En este caso,  $G$  no tiene ninguna simetría axial con traslación  $q$ , ya que  $1 \neq q^2 \in \mathbb{T}$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.23 se tiene que  $G$  únicamente puede contener giros y simetrías axiales. Si  $G$  no contiene ningún giro (a excepción del trivial), del Teorema 2.19 se sigue que como mucho puede contener una simetría axial. Con lo cual,  $G$  es el grupo trivial  $\{1\}$ , o un grupo cíclico de orden 2. Por otro lado, si  $G$  contiene un giro  $s \neq 1$ ,  $s = s_{(O, \theta)}$ , veamos que todo elemento de  $G$  fija el punto  $O$ :

Suponemos, por reducción al absurdo, que  $G$  contiene un elemento  $g$  que no fija  $O$ , es decir  $g(O) = O' \neq O$ . Consideremos la composición  $gsg^{-1} \in G$ , y veamos que se trata de un giro de centro  $O'$  y ángulo  $\pm\theta$  en función de cómo sea  $g$ . Ponemos  $g$  en forma normal,  $g = ts'r^\varepsilon$ , con  $r = r_l$  ( $l$  una recta cualquiera),  $\varepsilon = 0$  ó  $1$  y  $s'$  un giro de centro  $O$  con  $O \in l$ , luego  $s'$  fija  $O$  y conmuta con  $s$ . Distinguimos dos casos en función del valor de  $\varepsilon$ :

- Si  $\varepsilon = 0$ ,  $g = ts'$  y  $gsg^{-1} = ts's(s')^{-1}t^{-1} = tst^{-1}$ . Comprobemos que  $tst^{-1} = s(t(O), \theta)$ , viendo que  $\forall P \in \mathbb{R}^2$ ,  $tst^{-1}(P) = s(t(O), \theta)(P)$ :

Observemos que (ver Figura 11), por un lado,  $d(P, t(O)) = d(t^{-1}(P), O)$ . Por otro lado,  $d(O, st^{-1}(P)) = d(t(O), tst^{-1}(P))$ . Además,  $d(t^{-1}(P), st^{-1}(P)) = d(P, tst^{-1}(P))$ , luego  $\Delta t^{-1}(P)st^{-1}(P)O = \Delta Ptst^{-1}(P)t(O)$ , por lo que  $tst^{-1}(P)\widehat{t}(O)P = \theta$  y se tiene lo que queríamos.

Por lo tanto,  $gsg^{-1} = s(t(O), \theta)$ , con  $t(O) = ts'(O) = g(O) = O'$ .

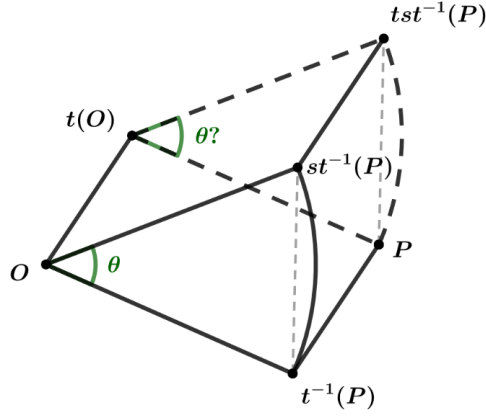


Figura 11: Composición  $gsg^{-1}$  caso  $\varepsilon = 0$

- Si  $\varepsilon = 1$ ,  $g = ts'r$  y  $gsg^{-1} = ts'rsr(s')^{-1}t^{-1} = ts^{-1}t^{-1}$  ya que  $rsr = s^r = s^{-1}$  por el Corolario 2.17. Es decir,  $gsg^{-1} = (tst^{-1})^{-1} = (s(t(O), \theta))^{-1}$  por el caso anterior.

Por lo tanto,  $gsg^{-1} = s(t(O), -\theta)$ , con  $t(O) = ts'r(O) = g(O) = O'$ .

Entonces,  $gsg^{-1}s^{\pm 1}$  es una traslación no trivial (ver Figura 10(i)), pero este tipo de elementos no están permitidos en  $G$ , con lo cual estamos ante una contradicción.

**Teorema 4.3.** Si  $G \leq \mathbb{E}$  y  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ , entonces existe un punto  $O \in \mathbb{R}^2$  que es fijo por todos los elementos de  $G$ . □

**Corolario 4.4. (Leonardo da Vinci)** Todo subgrupo finito de  $\mathbb{E}$  es cíclico o diédrico.

*Demostración.* Sea  $G$  un subgrupo finito de  $\mathbb{E}$ . Como cualquier traslación no trivial tiene orden infinito, necesariamente  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ , y por el Teorema 4.3 se tiene que  $G$  fija un punto  $O$ :  $g(O) = O \forall g \in G$ . Luego el subgrupo  $OP$  de  $G$ ,  $G^+$ , está formado por giros de centro  $O$ . Si  $G^+ = \{1\}$ , del Teorema 2.19 se sigue que  $G$ , como mucho puede contener una simetría axial, por lo que  $G \cong \{1\}$  o  $Z_2$ .

Por otro lado, si  $G^+ \neq \{1\}$ , existe un giro en  $G$ ,  $s = s_{(O, \theta)}$ , de amplitud mínima positiva. Por la propiedad Arquimediana de los números reales y la propiedad que tiene  $\mathbb{N}$  de ser un conjunto bien ordenado, existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  mínimo, tal que  $m\theta \geq 2\pi$ . La minimalidad de  $m$  implica que  $m\theta < 2\pi + \theta$ , y la minimalidad de  $\theta$  nos lleva a que  $m\theta = 2\pi$ . Además,  $G$  no puede contener ningún giro de la forma  $s' = s_{(O, \phi)}$  con  $(n-1)\theta < \phi < n\theta$  y  $n \in \mathbb{N}$ , ya que de ser así,  $s^{-(n-1)}s' = s_{(O, -(n-1)\theta)}s_{(O, \phi)} = s_{(O, -(n-1)\theta + \phi)} \in G$ , con  $-(n-1)\theta + \phi < -(n-1)\theta + n\theta = -n\theta + \theta + n\theta = \theta$ , lo cual contradice la minimalidad de  $\theta$ . Por lo tanto, cualquier giro en  $G$  es una potencia de  $s$ , es decir,  $G^+ = \langle s \mid s^m \rangle \cong Z_m$ .

Si  $G$  no contiene ninguna simetría axial, entonces  $G = G^+ \cong Z_m$ . En caso contrario, consideramos  $r = r_l \in G$  una simetría axial con  $O \in l$  (pues  $G$  fija  $O$ ). Por lo visto en la demostración del Teorema 4.3, sabemos que  $rsr^{-1} = s_{(r(O), -\theta)} = s_{(O, -\theta)} = s^{-1}$ , de donde

$$G = \langle s, r \mid s^m = 1, r^2 = 1, rsr^{-1} = s^{-1} \rangle \cong D_{2m}.$$

□

**Ejercicio 4.5.** *Un subgrupo discreto  $G$  de  $\mathbb{E}$  fija un punto si y solo si es finito.*

*Demostración.* Suponemos que  $G \leq \mathbb{E}$  es finito. Como  $\mathbb{T}$  no tiene elementos de orden finito (a excepción del elemento identidad),  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ , y aplicando el Teorema 4.3 se tiene que  $G$  fija un punto.

Suponemos que  $G \leq \mathbb{E}$  es discreto y fija un punto  $O$ . Entonces para cualquier punto  $P \neq O$  y  $g \in G$ , se tiene que  $d(O, P) = d(g(O), g(P)) = d(O, g(P))$ . Por lo tanto, las imágenes  $g(P)$  están en la circunferencia de centro  $O$  y radio  $d(O, P)$ , por lo que en particular están en el círculo de centro  $P$  y radio  $3d(O, P)$ . Como  $G$  es discreto, el conjunto  $G(P) = \{g(P) \mid g \in G\}$  es finito, es decir,  $G(P) = \{g_1(P), g_2(P), \dots, g_n(P)\}$ . Luego  $\forall g \in G$  se tiene que  $g(P) = g_i(P)$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que  $g_i^{-1}g$  además de fijar  $O$  fija  $P$ , luego o es la identidad o es la simetría axial  $r_l$  con  $l$  la recta que une  $O$  y  $P$ . Entonces, o  $g = g_i$  o  $g = g_i r_l$ . Así  $|G| \leq 2|G(P)|$ , y por lo tanto  $G$  es finito.  $\square$

**Proposición 4.6.** *Todo subgrupo de un grupo discreto  $G$ , es discreto.*

**Ejercicio 4.7.** *Dados un triángulo plano y un punto del interior o del borde de dicho triángulo, la distancia del punto a uno de los vértices es menor o igual que la distancia de dicho vértice a, al menos, uno de los dos vértices restantes.*

*Demostración.* Consideramos el  $\triangle OAB$  con  $d(O, B) \geq d(O, A)$  y tomamos  $P$  un punto cualquiera del interior o del borde de dicho triángulo. Trazamos el círculo  $C$  de centro  $O$  y radio  $d(O, B)$ , y la recta  $OP$  cortando al segmento  $AB$  en  $Q$  y al círculo  $C$  en  $R$ . Entonces,

$$d(O, P) \leq d(O, Q) \leq d(O, R) = d(O, B).$$

$\square$

## 4.2. Teorema de clasificación

**Teorema 4.8.** *Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{E}$ , entonces su subgrupo de traslaciones  $T = G \cap \mathbb{T}$  es trivial, cíclico infinito o un grupo abeliano libre de rango 2:*

$$T = Z^r, \quad r = 0, 1, \text{ ó } 2.$$

*Demostración.* Asumimos que  $T$  no es trivial. Por la Proposición 4.6,  $T$  es discreto, luego podemos fijar un punto  $O \in \mathbb{R}^2$  y tomar  $t_{\bar{a}} \in T \setminus \{1\}$  con:

$$d(O, t_{\bar{a}}(O)) \leq d(O, t(O)) \quad \forall t \in T \setminus \{1\}. \quad (4.1)$$

Entonces, la recta  $l$  que pasa por  $O$  y  $t_{\bar{a}}(O)$  contiene todos los puntos  $t_{\bar{a}}^n(O)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de la órbita de  $O$  bajo el subgrupo cíclico infinito  $H = \langle t_{\bar{a}} \rangle$  de  $T$ . Si  $H = T$  ya hemos terminado, por lo que asumamos que  $H < T$ .

En primer lugar, veamos que  $t(O) \notin l$ ,  $\forall t \in T \setminus H$ . Suponemos por reducción al absurdo que existe  $t \in T \setminus H$  tal que  $t(O) \in l$ . Entonces hay dos posibilidades:

- (a)  $t(O) = t_{\bar{a}}^n(O)$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , o
- (b)  $t(O)$  cae en el interior del segmento  $[t_{\bar{a}}^n(O), t_{\bar{a}}^{n+1}(O)]$ .

En el caso (a),  $t^{-1}t_{\bar{a}}^n$  es una traslación que fija  $O$ , luego necesariamente  $t^{-1}t_{\bar{a}}^n = 1$ , de donde  $t = t_{\bar{a}}^n \in H$ , lo cual contradice la elección de  $t$ . En el caso (b),

$$0 < d(O, t_a^{-n}t(O)) = d(t_a^n(O), t(O)) < d(t_a^n(O), t_a^{n+1}(O)) = d(O, t_a(O)),$$

lo cual contradice la minimalidad de  $d(O, t_a(O))$  dada por (4.1). Por lo tanto,  $t(O) \notin l, \forall t \in T \setminus H$ .

Nuevamente, por ser  $T$  discreto, podemos tomar  $t_b \in T \setminus H$  con:

$$d(O, t_b(O)) \leq d(O, t(O)) \quad \forall t \in T \setminus H. \quad (4.2)$$

Entonces la recta  $l'$  que pasa por  $O$  y  $t_b(O)$  contiene todos los puntos  $t_b^n(O)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de la órbita de  $O$  bajo el subgrupo cíclico infinito  $K = \langle t_b \rangle$  de  $T$ . Como  $l \cap l' = \{O\}$ , las rectas  $t_a^m(l')$  y  $t_b^n(l)$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , constituyen una partición de  $\mathbb{R}^2$  en paralelogramos cuyos vértices forman la órbita de  $O$  bajo el subgrupo  $H \times K$  de  $T$ . Ahora bien,  $H \times K \cong \mathbb{Z}^2$ , luego si  $H \times K = T$  hemos acabado. Para finalizar, asumamos por tanto que  $H \times K < T$  y busquemos una contradicción.

Tomamos  $t \in T \setminus H \times K$ . Entonces  $t(O)$  está en el interior o en el borde (excluyendo los vértices) de uno de los paralelogramos de la partición ya citada. Suponemos que dicho paralelogramo tiene por vértices los puntos  $t_b^n t_a^m(O)$ ,  $t_b^n t_a^{m+1}(O)$ ,  $t_b^{n+1} t_a^{m+1}(O)$  y  $t_b^{n+1} t_a^m(O)$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Así,  $P = t_b^{-n} t_a^{-m} t(O)$  cae en el interior o en el borde (excluyendo los vértices) del paralelogramo  $OAQB$ , donde  $A = t_a(O)$ ,  $B = t_b(O)$  y  $Q = t_b t_a(O)$ .

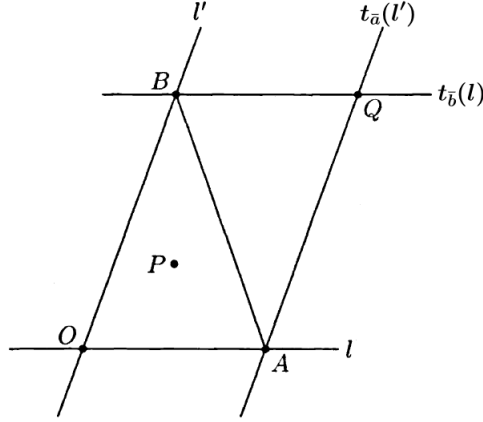


Figura 12: Paralelogramo  $OAQB$

Si  $P$  cae en el  $\triangle OAB$  como ocurre en la Figura 12, por el Ejercicio 4.7 y teniendo en cuenta que  $P \neq B$ ,  $d(O, P) < d(O, B)$ , lo cual contradice la minimalidad de  $d(O, t_b(O))$  dada por (4.2). Si por el contrario  $P$  cae en el  $\triangle AQB$ , el punto  $P' = t_b^{-1} t_a^{-1}(P)$  cae en el  $\triangle t_b^{-1}(O) O t_a^{-1}(O)$ . Aplicando el Ejercicio 4.7 y teniendo en cuenta que como  $P \neq A$ ,  $P' \neq t_b^{-1}(O)$ , se tiene que  $d(O, P') < d(O, t_b^{-1}(O)) = d(t_b(O), O) = d(O, t_b(O))$ , que de nuevo contradice la minimalidad de  $t_b$ .

Por lo tanto, hemos mostrado que  $T$  es igual a uno de los tres grupos siguientes:

$$\{1\} \cong \mathbb{Z}^0, \quad \langle t_a \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad \langle t_a, t_b \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

□

Consideramos el primero de los casos, en el que  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ . Por el Teorema 4.3 tenemos que existe  $O \in \mathbb{R}^2$  fijo por  $G$ , y aplicando el Ejercicio 4.5 llegamos a que  $G$  es finito. Finalmente utilizando el Corolario 4.4 podemos concluir que  $G \cong \mathbb{Z}_n$  o  $D_{2n}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

### 4.3. Frisos y sus grupos de simetría

En este apartado vamos a estudiar los subgrupos discretos de  $\mathbb{E}$  cuyo subgrupo de traslaciones es cíclico infinito. Estos subgrupos son los grupos de simetría de unas figuras planas infinitas que reciben el nombre de frisos. Consecuentemente, a dichos grupos de simetría se les llama grupos de friso.

A lo largo de este apartado vamos a denotar por  $F$  a un grupo de friso y por  $T = \langle t \mid \rangle$  a su subgrupo de traslaciones.

**Caso 1:**  $F$  no contiene ningún giro no trivial. En este caso,  $F^+ = T$ . Podría darse  $F = T$ , de donde obtenemos nuestro primer tipo,

$$F_1 = \langle t \mid \rangle.$$

En caso contrario,  $F$  contiene una isometría  $r$  de tipo OR que es, o bien una simetría axial, o bien una simetría axial con traslación. En cualquier caso,  $F^- = F^+r = Tr$  y  $|F : T| = 2$ . Por el Corolario 2.17,  $T \trianglelefteq F$ . Entonces  $rtr^{-1}$  genera  $rTr^{-1} = T$ , y esto junto con el Corolario 2.17 fuerza a que  $rtr^{-1} = t^{\pm 1}$  en función de que el eje de  $r$  sea paralelo o perpendicular a la dirección del vector de traslación de  $t$ . Si  $r$  es una simetría axial pueden darse los dos casos anteriores, por lo que obtenemos dos tipos más,

$$\begin{aligned} F_1^1 &= \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t \rangle, \\ F_1^2 &= \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Si por el contrario  $r$  es una simetría con traslación,  $r^2$  es una traslación no trivial,  $r^2 = t^h$  para algún  $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$ . Como  $r$  conmuta con  $r^2 = t^h$ ,  $r$  conmuta con  $t^h$ . Pero además, si  $\bar{a}$  es el vector de traslación de  $t$ , como  $r^2 = t_{\bar{a}}^h = t_{h\bar{a}}$ , el vector de traslación de  $r$ , que será  $(h/2)\bar{a}$ , y el vector de traslación de  $t$  son linealmente dependientes, luego  $r$  también conmuta con  $t$ . Por lo tanto,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(t^k r)^2 = t^k r t^k r = t^k t^k r r = t^{2k} t^h = t^{2k+h}. \quad (4.3)$$

A continuación necesitamos emplear un **truco** (siempre que nos refiramos a él más adelante lo llamaremos así), que consiste en:

- (1°) cambiar los generadores aplicando transformaciones elementales de Tietze,
- (2°) cambiar las relaciones que lo requieran,
- (3°) renombrar los generadores con sus símbolos iniciales.

En nuestro caso, elegimos  $k \in \mathbb{Z}$  tal que el exponente  $2k + h$  de (4.3) sea 0 ó 1, y aplicamos el **truco** anterior:

- (1°) mantenemos  $t$  pero cambiamos  $r$  por  $r' = t^k r$ ,
- (2°) observamos que  $r'$  conmuta con  $t$ ,
- (3°) denotamos a  $r'$  por  $r$ .

Además de conmutar con  $t$ , la nueva  $r$  tiene cuadrado igual a 1 o  $t$ . En el primer caso volvemos a obtener  $F_1^1$  mientras que para el segundo caso obtenemos un nuevo tipo,

$$F_1^3 = \langle t, r \mid r^2 = t, t^r = t \rangle.$$

Con estos cuatro tipos geoméricamente diferentes hemos completado la clasificación de los grupos de friso libres de giros.

**Caso 2:**  $F$  contiene un giro no trivial  $s$ . Como  $t^s$  es de nuevo un generador de  $T$  ( $T \trianglelefteq F$  y  $T^s = T$ ), tenemos que  $t^s = t^{\pm 1}$ . Pero esto significa que si  $t = t_{\bar{a}}$ , entonces  $s(\bar{a}) = \pm \bar{a}$  y como  $s \neq 1$ , necesariamente se tiene que  $s(\bar{a}) = -\bar{a}$ , es decir,  $s$  es un giro de amplitud  $\pi$  y por tanto de orden 2. Por el mismo motivo, cualquier otro giro  $s' \in F$  también tendrá orden 2, con lo que  $ss'$  es una traslación (ver Figura 10(i)). Entonces  $s' \in sT$  por lo que  $|F^+ : T| = 2$ . Podría darse  $F = F^+$ , de donde obtendríamos el tipo,

$$F_2 = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1} \rangle.$$

En caso contrario,  $F = F^+ \sqcup F^+r$ , con  $r$  una simetría axial o una simetría axial con traslación. Consideremos  $l$  la recta paralela al vector de traslación de  $t$  pasando por el centro  $O$  de  $s$ , y  $l'$  el eje de  $r$ . Como en el caso 1,  $t^r = t^{\pm 1}$ , de donde deducimos que  $l'$  es paralela o perpendicular a  $l$ . En el último caso,  $t^{rs} = t$  y  $rs$  es una isometría OR con eje paralelo a  $l$ . Tomando  $rs$  en lugar de  $r$  por el truco, podemos asumir que  $l'$  es paralela a  $l$ . Veamos que en realidad  $l' = l$ :

Asumimos que  $l' \neq l$  y buscamos una contradicción. Como  $O \in l \neq l'$ ,  $r(O) \notin l$ . Observamos que  $s^r = s_{(r(O), \pi)}$ , y por lo tanto la composición

$$s^r s = s_{(r(O), \pi)} s_{(O, \pi)}$$

es una traslación no trivial  $t'$  a lo largo de la recta  $m$  que une  $O$  y  $r(O)$ . Pero como  $l \cap m = \{O\}$  (pues  $O \in l \cap m$  y  $l \neq m$  ya que  $r(O) \notin l$  y  $r(O) \in m$ ),  $l$  y  $m$  no son paralelas luego  $t' \notin T$ , lo cual es una contradicción.

Si  $r$  es una simetría axial,  $rs$  es una simetría axial de eje  $m$  perpendicular a  $l$  en  $O$ . En este caso obtenemos el tipo,

$$F_2^1 = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = 1, t^r = t, (rs)^2 = 1 \rangle.$$

Remplazando la relación  $(rs)^2 = 1$  por  $s^r = s$ , que es equivalente, la presentación anterior es de la forma (3.3), y expone  $F_2^1$  como un producto semidirecto de la forma  $Z \rtimes_{\alpha} (Z_2 \times Z_2)$ .

Pero si  $r$  es una simetría axial con traslación, podemos asumir por el truco que  $r^2 = t$ . Ahora recordemos que  $l' = l$ , es decir, que  $l$  es el eje de  $r$ , y consideremos  $A$  el punto  $t(O)$ ,  $M$  el punto medio del segmento  $OA$  y  $M'$  el punto medio del segmento  $OM$  como se muestra en la siguiente figura:

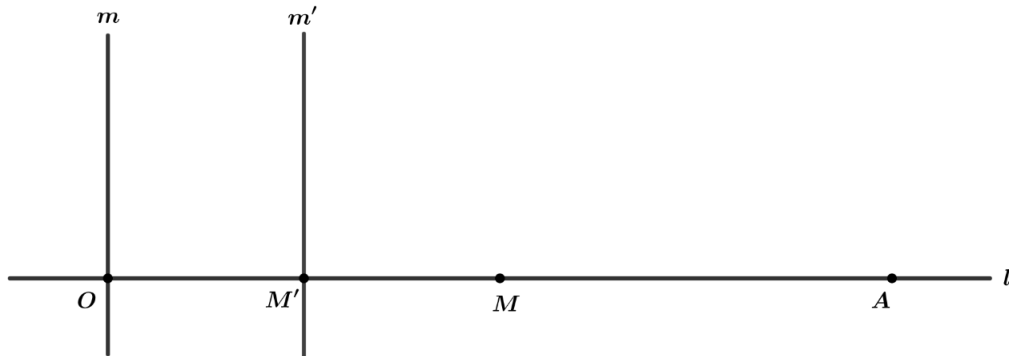


Figura 13: Construcción de  $m'$

Consideremos también  $m$  y  $m'$  las rectas perpendiculares a  $l$  en  $O$  y  $M'$  respectivamente. Entonces tenemos que:

$$s = r_l r_m, \quad r = r_{m'} r_m r_l.$$

Por lo tanto,  $rs = r_{m'}$  y  $(rs)^2 = 1$ . Obtenemos así nuestro último tipo,

$$F_2^2 = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (rs)^2 = 1 \rangle.$$

**Teorema 4.9.** *Existen exactamente siete tipos de frisos geoméricamente distintos. En la figura siguiente se muestran los siete, junto con la presentación de su grupo de simetría.*

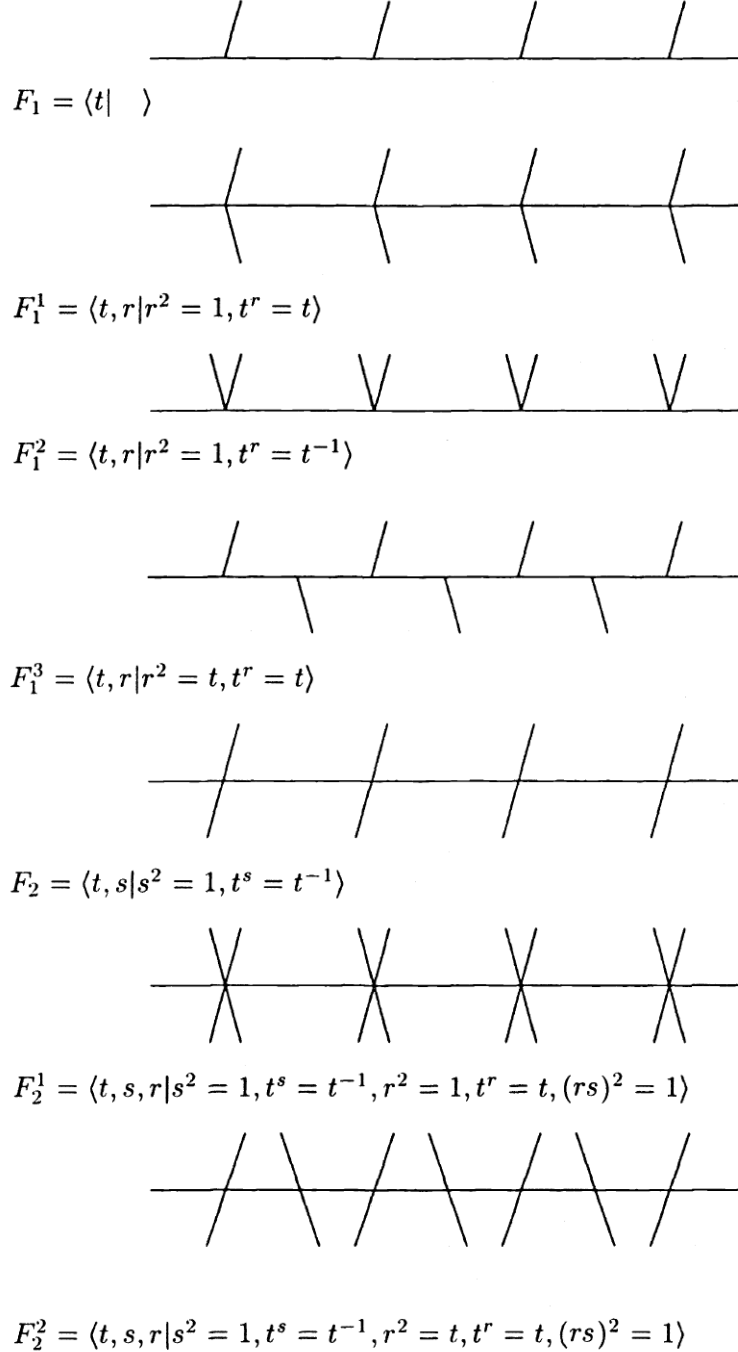


Figura 14: Los siete frisos y sus grupos de simetría

En cada uno de los frisos de la figura anterior, el eje  $l$  está representado por la recta horizontal y en todos ellos se ha tomado como figura base (figura a la que se le han ido aplicando en cada caso las simetrías del grupo) una recta oblicua. Las imágenes de la configuración se entiende que continúan indefinidamente a lo largo de  $l$  en ambas direcciones.  $\square$

**Ejercicio 4.10.** Los siete grupos de friso forman parte de exactamente cuatro clases de isomorfía.

*Demostración.* En primer lugar, observemos que cinco de los siete grupos de friso son fácilmente identificables a partir de la presentación que tenemos de ellos.

- Es claro que  $F_1 = \langle t \mid \rangle \cong Z$ .
- Para  $F_1^1 = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t \rangle$  usamos el teorema fundamental de los grupos abelianos que dice: todo grupo abeliano finitamente generado es isomorfo al producto directo de un número finito de grupos cíclicos.  $F_1^1$  es un grupo abeliano generado por 2 elementos, uno de orden 2 y otro de orden infinito, luego  $F_1^1 \cong Z_2 \times Z$ .
- $F_1^2 = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle \cong D_\infty$  (ver Ejemplo 2.7).
- $F_2 = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1} \rangle \cong D_\infty$  igual que el grupo anterior.
- En cuanto a  $F_2^1 = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = 1, t^r = t, (rs)^2 = 1 \rangle$ , ya hemos visto en el desarrollo del apartado que  $F_2^1$  es isomorfo a un producto semidirecto de la forma  $Z \rtimes_\alpha (Z_2 \times Z_2)$ .

Nos queda por determinar a qué grupo son isomorfos los grupos  $F_1^3$  y  $F_2^2$ . Vamos a verlo mediante un cambio en la presentación de los grupos a través de transformaciones elementales de Tietze.

- $F_1^3 = \langle t, r \mid r^2 = t, t^r = t \rangle$ :

La relación  $t^r = t$  es consecuencia de la relación  $r^2 = t$ :

$$rr = t \Rightarrow \begin{array}{l} r = r^{-1}t \\ r = tr^{-1} \end{array} \Rightarrow r^{-1}t = tr^{-1} \Rightarrow rtr^{-1} = t.$$

Por lo tanto, aplicando  $R-$  eliminamos la relación  $t^r = t$ . Ahora, el generador  $t$  es superfluo. Aplicamos  $X-$  y lo eliminamos junto con la relación en la que está involucrado. Así, llegamos a una nueva presentación del grupo dada por,

$$F_1^3 = \langle r \mid \rangle \cong Z.$$

- $F_2^2 = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (rs)^2 = 1 \rangle$ :

Como en el caso anterior,  $t^r = t$  es consecuencia de  $r^2 = t$ , por lo que aplicando  $R-$  la eliminamos. Ahora,  $t$  es superfluo, por lo que sustituimos  $t = r^2$  en el resto de relaciones ( $R+$ ):

$$F_2^2 = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, (r^2)^s = (r^2)^{-1}, r^2 = t, (rs)^2 = 1 \rangle.$$

Aplicando  $X-$  eliminamos  $t$  y la relación en la que aparece, quedándonos con la representación siguiente:

$$F_2^2 = \langle s, r \mid s^2 = 1, (r^2)^s = (r^2)^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle.$$



La segunda y la tercera de las relaciones son equivalentes a la nueva relación  $r^s = r^{-1}$ : Notemos que  $(rs)^2 = 1 \Leftrightarrow rsrs = 1 \Leftrightarrow rsr = s$  ya que  $s^{-1} = s$ , y así

$$srrs^{-1} = r^{-1}r^{-1} \Leftrightarrow rsrrs^{-1} = r^{-1} \Leftrightarrow srs^{-1} = r^{-1} \Leftrightarrow r^s = r^{-1}.$$

Luego substituyendo dichas dos relaciones por la nueva ( $R+$  y  $R-$ ), obtenemos la presentación

$$F_2^2 = \langle s, r \mid s^2 = 1, r^s = r^{-1} \rangle \cong D_\infty.$$

□

### Frisos en la realidad

La presencia de los frisos en la realidad es abundante. Los podemos encontrar en el arte y en la arquitectura, e incluso en el mobiliario urbano. A continuación vamos a mostrar tres ejemplos de frisos reales, para cada uno de los cuales vamos a indicar su grupo de simetría y la figura base a partir de la cual se han construido.

#### **Ejemplo 4.11.**



(a) Friso



(b) Figura base

Figura 15:  $F_1$

#### **Ejemplo 4.12.**



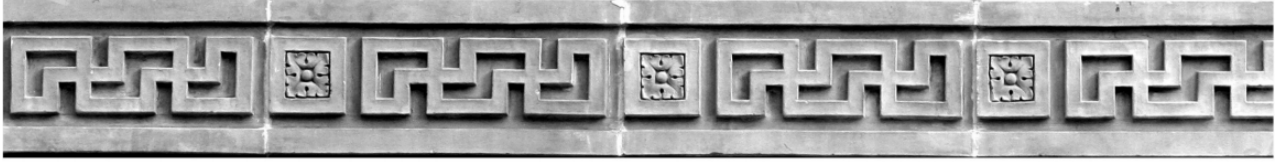
(a) Friso



(b) Figura base

Figura 16:  $F_1^3$

**Ejemplo 4.13.**



(a) Friso



(b) Figura base

Figura 17:  $F_2$

**Ejercicio 4.14.** *La clasificación de todos los subgrupos discretos del grupo  $G = \text{Isom}(\mathbb{R}, d)$ , con  $d$  la métrica usual en  $\mathbb{R}$ , da lugar a exactamente cuatro clases de isomorfía.*

*Demostración.* Vamos a clasificar todos los subgrupos discretos,  $H$ , de  $G$ , basándonos en el procedimiento seguido para la clasificación de los subgrupos discretos del Grupo Euclídeo  $\mathbb{E}$ .

En primer lugar, debemos dar la definición de subgrupo discreto de  $G$ , para lo cual basta adecuar la Definición 4.2 tomando los puntos en  $\mathbb{R}$  y cambiando las apariciones de la palabra “círculo” por “intervalo abierto”.

Sea  $H \cap T$  el subgrupo de traslaciones de  $H$ , con  $T$  el subgrupo de traslaciones de  $G$ . Veamos que solo existen dos posibilidades, o  $H \cap T \cong \{1\}$  o  $H \cap T \cong \mathbb{Z}$ : Asumimos que  $H \cap T$  no es trivial. Por la Proposición 4.6,  $H \cap T$  es discreto, luego podemos fijar un punto  $O \in \mathbb{R}$  y tomar  $t_c \in H \cap T \setminus \{1\}$  con:

$$d(O, t_c(O)) \leq d(O, t(O)) \quad \forall t \in H \cap T \setminus \{1\}. \quad (4.4)$$

Entonces, la recta real,  $\mathbb{R}$ , contiene todos los puntos  $t_c^n(O)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de la órbita de  $O$  bajo el subgrupo cíclico infinito  $K = \langle t_c \rangle$  de  $H \cap T$ . Si  $K = H \cap T$  hemos terminado, por lo que asumamos que  $K < H \cap T$  y busquemos una contradicción.

Sea  $t_d \in H \cap T \setminus K$ . Como  $t_d(O) \in \mathbb{R}$ , o  $t_d(O) = t_c^n(O)$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , o  $t_d(O)$  cae en el interior del segmento  $[t_c^n(O), t_c^{n+1}(O)]$ . En el primer caso,  $(t_d)^{-1}t_c^n$  es una traslación que fija  $O$ , luego necesariamente  $(t_d)^{-1}t_c^n = 1$ , de donde  $t_d = t_c^n \in K$ , lo cual contradice la elección de  $t_d$ . En el segundo caso,

$$0 < d(O, t_c^{-n}t_d(O)) = d(t_c^n(O), t_d(O)) < d(t_c^n(O), t_c^{n+1}(O)) = d(O, t_c(O)),$$

lo cual contradice la minimalidad de  $d(O, t_c(O))$  dada por (4.4). Por lo tanto, hemos probado que efectivamente  $H \cap T \cong \{1\}$  o  $Z$ .

Recordemos que, como vimos en el apartado 2.1, los únicos tipos de isometrías en  $\mathbb{R}$  son las traslaciones y las simetrías centrales, de tipo OP y OR respectivamente. Entonces, si  $H$  no contiene ninguna simetría central no trivial,  $H = H^+ = H \cap T \cong \{1\}$  o  $Z$ .

En caso contrario, suponemos que  $H$  contiene una simetría central  $r = r_{c/2} = t_c r_0$ . Para cualquier otra simetría central  $r' = r_{d/2} = t_d r_0 \in H$  se tendrá que  $r' r = t_d r_0 t_c r_0 = t_d t_{-c} r_0 r_0 = t_{d-c} \in H^+$ . Entonces  $r' \in H^+ r$ , y por lo tanto,  $|H : H^+| = 2$ . Luego si  $H \cap T \cong \{1\}$ ,  $H = \langle r \rangle \cong Z_2$ , mientras que si  $H \cap T \cong Z = \langle t \mid \rangle$ ,  $H = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle \cong D_\infty$ .  $\square$



## 5. Grupos cristalográficos planos

Un subgrupo discreto  $G$  de  $\mathbb{E}$  con subgrupo de traslaciones  $T = G \cap \mathbb{T} \cong \mathbb{Z}^2$ , recibe el nombre de grupo cristalográfico plano. En esta sección vamos a describir estos grupos completando así la clasificación de todos los subgrupos discretos de  $\mathbb{E}$  de acuerdo al Teorema 4.8. Finalizaremos viendo una serie de ejemplos de figuras en  $\mathbb{R}^2$  que tienen por grupo de simetría a uno de estos grupos cristalográficos.

Al igual que en la demostración del Teorema 4.8, tomamos  $T = \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}} \rangle$ , con  $t_{\bar{a}} \in T \setminus \{1\}$  verificando (4.1) y  $t_{\bar{b}} \in T \setminus \langle t_{\bar{a}} \rangle$  verificando (4.2).

$G$  se puede obtener como una doble extensión de  $T$ , calculando primero el subgrupo OP de  $G$ ,  $G^+$ , y completando posteriormente hasta  $G$ . En el apartado 5.1 calcularemos  $G^+$ , y en el apartado 5.2 completaremos  $G$  totalmente.

### 5.1. Caso OP

En todo este apartado vamos a asumir  $G = G^+$ .

#### La restricción cristalográfica

Asumir que  $G = G^+$  significa que todo elemento de  $G \setminus T$  es un giro. Podría ocurrir que  $G \setminus T$  fuese vacío, en cuyo caso obtendríamos nuestro primer tipo,

$$G_1 = \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}} \mid t_{\bar{a}} t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}} t_{\bar{a}} \rangle.$$

Asumamos por tanto que  $T \neq G$ , es decir, que  $G$  contiene giros no triviales.

El siguiente lema no lo demostraremos, aunque su demostración no es difícil.

**Lema 5.1.** *Si  $s$  es un giro de un subgrupo discreto de  $\mathbb{E}$ , entonces*

- (i)  *$s$  tiene orden  $n \in \mathbb{N}$  finito, y*
- (ii) *alguna potencia de  $s$  es igual a  $s_{(O, 2\pi/n)}$ , con  $O$  el centro de  $s$ .*

**Lema 5.2.** *El orden  $n$  de un giro no trivial en  $G$  es 2, 3, 4 ó 6.*

*Demostración.* Sea  $s' = s_{(O, \theta)}$  un giro no trivial de  $G$  de orden  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Como  $1 = (s')^n = s_{(O, n\theta)}$ , necesariamente  $n\theta = 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\theta = 2k\pi/n$ , de donde  $s' = s^k$  con  $s = s_{(O, 2\pi/n)}$ . Consideramos  $A = t_{\bar{a}}(O)$ , con  $t_{\bar{a}}$  una traslación que cumple la minimalidad dada por (4.1), y trazamos el círculo de centro  $O$  y radio  $d(O, A)$ . Las imágenes de  $A$  mediante las diferentes potencias de  $s$  caen todas en ese círculo, como se muestra en la Figura 18 para los casos  $n = 5$  y  $n \geq 7$ .

Buscamos una contradicción para los casos ilustrados en la Figura 18. En primer lugar, asumimos que  $n \geq 7$  y consideramos la traslación  $t = st_{\bar{a}}s^{-1}t_{\bar{a}}^{-1}$ . Entonces,

$$t(A) = st_{\bar{a}}s^{-1}t_{\bar{a}}^{-1}(A) = st_{\bar{a}}s^{-1}t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{a}}(O) = st_{\bar{a}}s^{-1}(O) = st_{\bar{a}}(O) = s(A),$$

y por lo tanto, usando además que el lado de un  $n$ -ágono regular es menor que su radio cuando  $n \geq 7$ ,

$$d(O, t(O)) = d(A, t(A)) = d(A, s(A)) < d(O, A) = d(O, t_{\bar{a}}(O)),$$

lo cual contradice la minimalidad de  $t_{\bar{a}}$ , y por tanto excluye el caso (ii) de la Figura 18.

Asumimos ahora que  $n = 5$  y consideramos la traslación  $t = s^3 t_{\bar{a}} s^{-3} t_{\bar{a}}$ . Tomando  $A' = t_{\bar{a}}^{-1}(O)$  se tiene que,

$$t(A') = s^3 t_{\bar{a}} s^{-3} t_{\bar{a}}^{-1}(O) = s^3 t_{\bar{a}} s^{-3}(O) = s^3 t_{\bar{a}}(O) = s^3(A),$$

y por lo tanto,

$$d(O, t(O)) = d(A', t(A')) = d(A', s^3(A)) < d(O, A) = d(O, t_{\bar{a}}(O)),$$

lo cual contradice de nuevo la minimalidad de  $t_{\bar{a}}$ , excluyendo así el caso  $n = 5$ . En la última ecuación hemos utilizado que  $d(A', s^3(A))$ , que es el lado de un decágono regular, es menor que su radio.

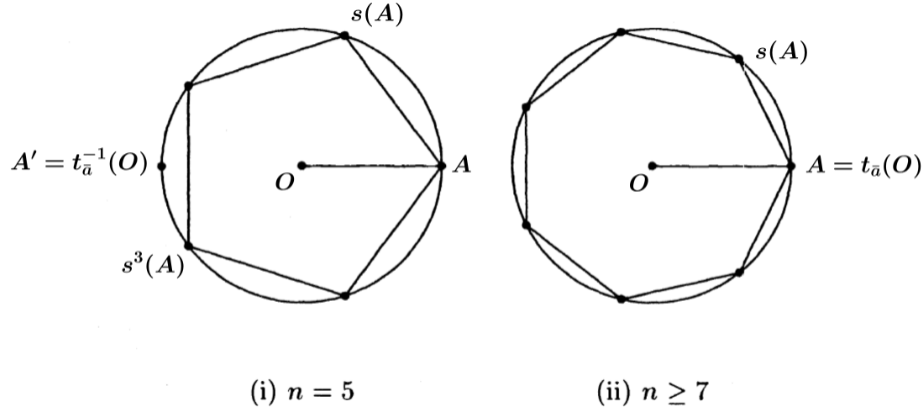


Figura 18: La restricción cristalográfica

□

Esta limitación del valor de  $n$ , especialmente la exclusión de  $n = 5$ , es lo que se conoce como la restricción cristalográfica.

### El parámetro $n$

Denotemos por  $n$  al orden máximo de un giro en  $G$ . Entonces, por el Lema 5.1(ii) podemos asumir que  $G$  contiene un giro  $s = s_{(O, 2\pi/n)}$ . Todas las potencias de  $s$  tienen órdenes divisores de  $n$ . Veamos que esos son los únicos órdenes posibles para un giro en  $G$ :

Suponemos, por reducción al absurdo, que existe un giro en  $G$  de orden  $m$  con  $m \nmid n$ . De nuevo por el Lema 5.1(ii),  $G$  contiene un giro  $s'$  de amplitud  $2\pi/m$ . Como  $m \nmid n$ ,  $h = \text{mcd}(m, n) < m$ . Por el algoritmo de Euclides, existen  $c, d \in \mathbb{Z}$  tales que  $cm + dn = h < m$ . Consideramos la composición  $(s')^d s^c$ . Las rectas  $l'$  y  $l''$  de la Figura 10 asociadas a dicha composición no pueden ser paralelas ya que:

$$l' \parallel l'' \Leftrightarrow \pi c/n + \pi d/m = \pi \Leftrightarrow \pi(cm + dn)/mn = \pi \Leftrightarrow cm + dn = mn > m.$$

Así, la composición  $(s')^d s^c$  es un giro de amplitud  $2(\pi c/n + \pi d/m) = 2\pi h/mn$ , y por tanto de orden  $mn/h > n$  (pues  $h < m$ ), lo cual contradice la maximalidad de  $n$ .

Fijamos ahora  $s = s_{(O, 2\pi/n)}$  con  $n$  máximo, y consideramos  $g \in G$  arbitrario. Entonces  $g$  es o una traslación o un giro. En el último caso,  $|g| = d$  con  $d \mid n$ , y  $g$  es por tanto un giro de amplitud  $2\pi k/d$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La composición  $gs^{-kn/d}$  es una traslación (ver Figura 10(i)). Entonces  $g \in Ts^{kn/d}$ , con lo que acabamos de probar el siguiente resultado.

**Lema 5.3.**  *$G$  se puede expresar como el producto semidirecto de  $T$  y el subgrupo  $S = \langle s \rangle \cong Z_n$  de  $G$ , con  $n$  el orden máximo de un giro en  $G$ .*  $\square$

Combinando el lema anterior con el Lema 5.2 vemos que  $G$  es un producto semidirecto de la forma  $Z^2 \rtimes_{\alpha} Z_n$ , con  $n = 2, 3, 4$  ó  $6$ . Nos falta por determinar en cada uno de los casos el homomorfismo  $\alpha$ , que va a surgir de la elección del generador  $t_{\bar{b}}$  en función de  $t_{\bar{a}}$  y  $s$ .

### La elección de $t_{\bar{b}}$

El caso  $n = 2$  no tiene dificultad:  $s$  es un giro de amplitud  $\pi$ , por lo que la conjugación por  $s$  transforma cualquier traslación en su inversa. En particular,

$$st_{\bar{a}}s^{-1} = t_{\bar{a}}^{-1}, \quad st_{\bar{b}}s^{-1} = t_{\bar{b}}^{-1},$$

y estas ecuaciones determinan la acción  $\alpha$  de  $s$  en  $T$ . Obtenemos así nuestro segundo tipo,

$$G_2 = \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^2 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{b}}^{-1} \rangle.$$

Notemos que la elección de  $t_{\bar{b}} \in T \setminus \langle t_{\bar{a}} \rangle$  aquí, al igual que en el caso de  $G_1$ , está sujeta únicamente a la minimalidad de  $d(O, t_{\bar{b}}(O))$  dada por (4.2). Esto no es así en el resto de casos, los cuales vamos a ver a continuación.

Los casos  $n = 3, 4, 6$  están ilustrados en la Figura 19, donde  $s = s_{(O, 2\pi/n)}$ . En cada caso, la figura muestra las imágenes del punto  $A = t_{\bar{a}}(O)$  mediante las diferentes potencias de  $s$  en el círculo de centro  $O$  y radio  $d(O, A)$ . Notemos que cada uno de estos puntos es la imagen de  $O$  por una traslación, por ejemplo:

$$s(A) = st_{\bar{a}}(O) = st_{\bar{a}}s^{-1}(O) = t_{\bar{a}}^s(O) = t_{s(\bar{a})}(O).$$

Como todas estas traslaciones satisfacen la minimalidad requerida en (4.2) al estar todas a una distancia  $\|\bar{a}\|$  de  $O$ , cualquiera de estos puntos, a excepción de  $t_{\bar{a}}^{\pm 1}(O)$ , es un candidato para  $t_{\bar{b}}(O)$ . Elegimos en cada caso  $t_{\bar{b}}$  como se muestra en la Figura 19, y tomamos  $B = t_{\bar{b}}(O)$ .

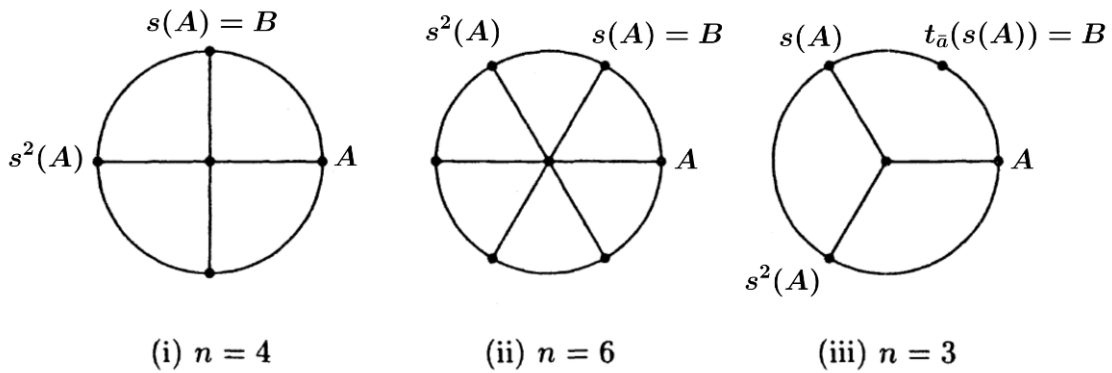


Figura 19: La elección de  $t_{\bar{b}}$

- (i)  $n = 4$ : tomamos  $t_{\bar{b}}$  la traslación  $t_{s(\bar{a})}$  que transforma  $O$  en  $s(A)$ . Entonces  $st_{\bar{b}}s^{-1} = t_{s(\bar{b})}$  es la traslación que transforma  $O$  en:

$$st_{\bar{b}}s^{-1}(O) = st_{\bar{b}}(O) = s^2(A) = t_{\bar{a}}^{-1}(O).$$

Por lo tanto, la acción de  $S$  en  $T$  viene dada por:

$$st_{\bar{a}}s^{-1} = t_{\bar{b}}, \quad st_{\bar{b}}s^{-1} = t_{\bar{a}}^{-1}.$$

- (ii)  $n = 6$ : tomamos de nuevo  $t_{\bar{b}} = st_{\bar{a}}s^{-1}$ , traslación que transforma  $O$  en  $s(A)$ . Como  $s^2(A)$  es la imagen por  $t_{\bar{a}}^{-1}$  del punto  $s(A) = t_{\bar{b}}(O)$ , y las traslaciones conmutan,  $st_{\bar{b}}s^{-1}$  transforma  $O$  en:

$$st_{\bar{b}}s^{-1}(O) = st_{\bar{b}}(O) = s^2(A) = t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{b}}(O) = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}(O).$$

Por lo tanto, la acción de  $S$  en  $T$  viene dada por:

$$st_{\bar{a}}s^{-1} = t_{\bar{b}}, \quad st_{\bar{b}}s^{-1} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}.$$

- (iii)  $n = 3$ : por coherencia con el caso (ii), tomamos  $B = t_{\bar{b}}(O)$  el punto del círculo que es diametralmente opuesto al punto  $s^2(A)$ . Entonces, teniendo en cuenta además que en este caso  $s^3 = 1$ :

$$t_{\bar{b}}^{-1}(O) = s^2(A) = s^{-1}(A) = s^{-1}t_{\bar{a}}(O) = s^{-1}t_{\bar{a}}s(O),$$

y, como  $s(A) = t_{\bar{a}}^{-1}(B)$ ,

$$st_{\bar{a}}s^{-1}(O) = s(A) = t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{b}}(O) = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}(O).$$

Por lo tanto, la acción de  $S$  en  $T$  viene dada por:

$$st_{\bar{a}}s^{-1} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}, \quad st_{\bar{b}}s^{-1} = t_{\bar{a}}^{-1}.$$

Hemos visto que, cada uno de los cinco casos  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ , da lugar a un solo grupo  $G_n$ , cuya presentación es la mostrada en el siguiente teorema.

**Teorema 5.4.** *Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{E}$  con  $T \cong Z^2$  y  $G^+ = G$ , existen exactamente cinco posibilidades:*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}} \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}} \rangle, \\ G_2 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^2 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{b}}^{-1} \rangle, \\ G_3 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^3 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1} \rangle, \\ G_4 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^4 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1} \rangle, \\ G_6 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^6 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

□

Al igual que en los grupos de friso, cada uno de estos grupos es el grupo de simetría de una figura plana. A estas figuras se les llama **teselaciones** de  $\mathbb{R}^2$ .



## 5.2. Caso OR

En este apartado  $G$  denota el subgrupo discreto de  $\mathbb{E}$  con subgrupo de traslaciones  $T \cong Z^2$  y subgrupo OP,  $G^+$ , de índice 2. Asumimos por tanto que  $G = G^+ \sqcup G^+r$ , con  $r$  una isometría de tipo OR, y que  $G^+$  es uno de los grupos  $G_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 6$  obtenidos en el apartado anterior. Así,  $G$  es determinado por los valores de  $n$ ,  $r^2$  y los conjugados  $t_{\bar{a}}^r$ ,  $t_{\bar{b}}^r$  y  $s^r$ . Vamos a realizar el análisis por casos en función del valor de  $n$ , pero en primer lugar vamos a hacer una simplificación.

Nos centramos en la acción de  $r$  en  $T$  y reducimos a dos el número de posibilidades para  $(t_{\bar{a}}^r, t_{\bar{b}}^r)$ . Esto se hace utilizando el **truco** visto en el apartado 4.3: elegimos nuevos generadores para  $T$  y, si es necesario para  $S$ , y reasignamos los símbolos  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s$  correspondientes. El significado de estos tres símbolos cambiará, por tanto, en lo siguiente que desarrollemos previo a la distinción de casos en función del valor de  $n$ .

**Lema 5.5.** *Para una isometría fija  $r \in G \setminus G^+$ , se cumple exactamente una de las dos condiciones siguientes:*

- $T$  está generado por elementos  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$  tales que

$$t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}. \quad (5.1)$$

- $T$  está generado por elementos  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$  tales que

$$t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}}. \quad (5.2)$$

*Demostración.* Veamos en primer lugar que (5.1) y (5.2) son incompatibles. Suponemos, para llegar a una contradicción, que (5.2) se cumple para los generadores  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$ , y (5.1) para los generadores  $t'_{\bar{a}} = t_{\bar{b}}^j t_{\bar{a}}^i$ ,  $t'_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k$ , con  $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$t_{\bar{b}}^j t_{\bar{a}}^i = t'_{\bar{a}} = t_{\bar{a}}'^r = t_{\bar{b}}^i t_{\bar{a}}^j,$$

de donde se sigue que  $j = i$ . De forma similar,

$$t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k = t'_{\bar{b}} = (t_{\bar{b}}'^r)^{-1} = t_{\bar{b}}^{-k} t_{\bar{a}}^{-l},$$

de donde se sigue que  $l = -k$ . Entonces,  $T$  está generado por el par

$$t'_{\bar{a}} = (t_{\bar{b}} t_{\bar{a}})^i, \quad t'_{\bar{b}} = (t_{\bar{b}}^{-1} t_{\bar{a}})^k,$$

y por lo tanto por  $t_{\bar{b}} t_{\bar{a}}$ ,  $t_{\bar{b}}^{-1} t_{\bar{a}}$ . Así, para algún  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,

$$t_{\bar{a}} = (t_{\bar{b}} t_{\bar{a}})^m (t_{\bar{b}}^{-1} t_{\bar{a}})^n = t_{\bar{b}}^{m-n} t_{\bar{a}}^{m+n}.$$

El hecho de que  $t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}$  sean generadores libres implica que  $m + n = 1$  y  $m - n = 0$ , es decir,  $2m = 1$ , lo cual es una contradicción. Luego (5.1) y (5.2) no pueden cumplirse para el mismo  $r$  en el mismo grupo.

Consideremos ahora  $t_{\bar{a}} \in T \setminus \{1\}$  y  $t_{\bar{b}} \in T \setminus \langle t_{\bar{a}} \rangle$  las traslaciones iniciales, es decir las traslaciones que, fijado un punto  $O \in \mathbb{R}^2$ , cumplen la minimalidad requerida en (4.1) y (4.2) respectivamente. Tomamos  $A = t_{\bar{a}}(O)$  y  $B = t_{\bar{b}}(O)$ . Remplazando  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$  por  $t_{\bar{a}}^{\pm 1}, t_{\bar{b}}^{\pm 1}$  si es necesario, podemos asumir que el ángulo  $\theta = \widehat{AOB}$  está entre 0 y  $\pi/2$ . Por minimalidad de  $t_{\bar{b}}$ , la distancia de  $B$  a  $A$  es mayor o igual que la distancia de  $B$  a  $O$ , luego, si consideramos  $l$  la recta perpendicular a la recta  $OA$  por el punto medio del segmento  $OA$ , se tiene que  $B$  cae en el mismo lado de  $l$  que  $O$  (Figura 20(i)).

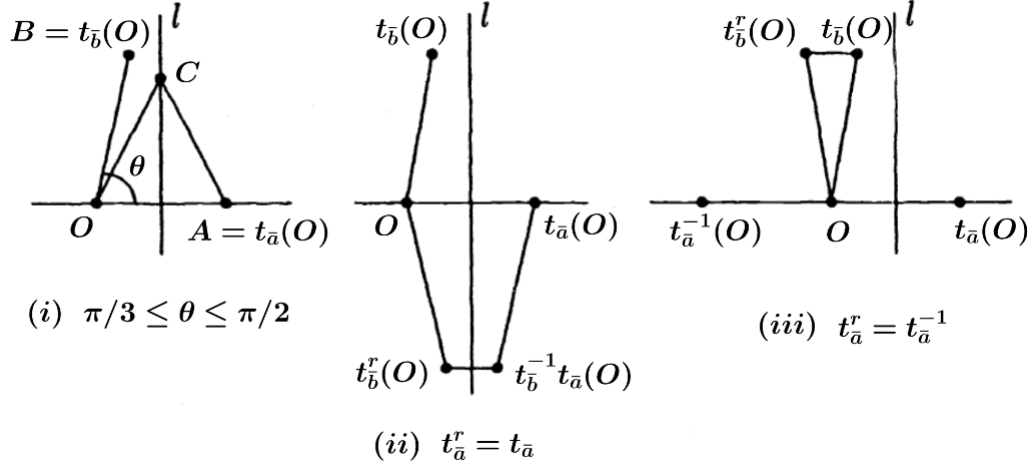


Figura 20: Acción de  $r$  en  $t_a, t_b$

De hecho, por minimalidad de  $t_a$ ,  $B$  no puede estar en el interior del triángulo equilátero  $\Delta OAC$ , luego  $\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Distinguimos ahora tres casos según si el eje de  $r$  es paralelo a  $t_a$  ( $t_a^r = t_a$ ), perpendicular a  $t_a$  ( $t_a^r = t_a^{-1}$ ), o ninguna de las dos ( $t_a^r \neq t_a^{\pm 1}$ ).

- (1) Consideramos  $t_a^r = t_a$ . Si  $\theta = \pi/2$ ,  $t_b^r = t_b^{-1}$  y se cumple (5.1) para los originales  $(t_a, t_b)$ . Pero si  $\theta < \pi/2$  (ver Figura 20(ii)),  $d(t_b^r(O), t_b^{-1}t_a(O)) < d(O, t_a(O))$ , y la minimalidad de  $t_a$  fuerza  $t_b^r = t_b^{-1}t_a$ . Entonces

$$(t_b^{-1}t_a)^r = (t_b^r)^{-1}t_a^r = (t_b^{-1}t_a)^{-1}t_a = t_b,$$

y (5.2) se cumple para el par  $(t_b, t_b^{-1}t_a)$ .

- (2) Consideramos  $t_a^r = t_a^{-1}$ . De la Figura 20(iii) vemos que  $d(t_b^r(O), t_b(O)) \leq d(O, t_a(O))$ , y por la minimalidad de  $t_a$ , o bien  $t_b^r = t_b$  o bien  $t_b^r t_a = t_b$ . Esto significa que o (5.1) se cumple para  $(t_b, t_a)$  o (5.2) se cumple para  $(t_b, t_b t_a^{-1})$  respectivamente.
- (3) Consideramos  $t_a^r \neq t_a^{\pm 1}$ . Como  $t_a^r \notin \langle t_a \rangle$ , podemos tomar  $t_b = t_a^r$ . Entonces  $t_b^r = t_a^{r^2} = t_a$ , y (5.2) se cumple para  $(t_a, t_b)$ .

□

Debemos ahora examinar el efecto que tienen todos los cambios anteriores en  $s$ . En primer lugar notemos que la sustitución de  $t_a, t_b$  por  $t_a^{\pm 1}, t_b^{\pm 1}$  solo es necesaria cuando  $n = 1$  o  $2$ , debido a que ya tenemos  $\theta = \pi/2$  cuando  $n = 4$  y  $\theta = \pi/3$  cuando  $n = 3, 6$  (ver Figura 19). Pero cuando  $n = 1$  no hay  $s$ , y cuando  $n = 2$ ,  $s$  transforma cada traslación en su inversa, luego estas sustituciones no tienen ningún efecto en  $s$ . Por otro lado hemos visto otros cinco cambios posibles, dos en el caso (1), dos en el caso (2) y uno en el caso (3), cuyos resultados están recogidos en la siguiente tabla:

Nuevos $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$	$\theta$	$n$	Efecto en $s$	Caso	Eje de $r$
$t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$	$\pi/2$	$\neq 3, 6$	Ninguno	(5.1)	$\parallel t_{\bar{a}}$
$t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}}$	$< \pi/2$	$\neq 4$	Cambiar $s$ por algún giro adecuado	(5.2)	$\parallel t_{\bar{a}}$
$t_{\bar{b}}, t_{\bar{a}}$	$\pi/2$	$\neq 3, 6$	Cambiar $s$ por $s^{-1}$	(5.1)	$\perp t_{\bar{a}}$
$t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$	$< \pi/2$	$\neq 4$	Ninguno	(5.2)	$\perp t_{\bar{a}}$
$t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}$	Cualquiera	Cualquiera	Ninguno	(5.2)	$\parallel t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}$

Tabla 2: Efecto en  $s$

Comencemos a examinar los cinco casos  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ .

### Caso $n = 1$

Este caso, en el que  $G^+ = T$  es abeliano, es el más sencillo y contiene tres tipos:

$$\begin{aligned}
G_1^1 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, r \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, r^2 = 1, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1} \rangle, \\
G_1^2 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, r \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, r^2 = 1, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}} \rangle, \\
G_1^3 &= \langle t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, r \mid t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, r^2 = t_{\bar{a}}, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Si  $r$  es una simetría axial, entonces el Lema 5.5 nos proporciona los tipos  $G_1^1$  y  $G_1^2$ . Asumamos por tanto que  $G \setminus G^+$  no contiene simetrías axiales y consideremos  $r^2 = t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k \in T$ , con  $l, k \in \mathbb{Z}$ . Utilizando la condición (5.1) tenemos

$$t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k = (t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k)^r = t_{\bar{b}}^{-l} t_{\bar{a}}^k,$$

de donde se sigue que  $l = 0$ , y por lo tanto  $r^2 = t_{\bar{a}}^k$ . Por el **truco** podemos tomar  $k = 0$  ó  $1$ , pero  $k \neq 0$  porque  $G$  no tiene simetrías axiales. Para  $k = 1$  obtenemos el tipo  $G_1^3$ . Por otro lado, utilizando la condición (5.2) tenemos

$$t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k = (t_{\bar{b}}^l t_{\bar{a}}^k)^r = t_{\bar{b}}^k t_{\bar{a}}^l,$$

de donde se sigue que  $l = k$ , y por lo tanto  $r^2 = (t_{\bar{b}}t_{\bar{a}})^k$ . Tomamos de nuevo  $k = 0$  ó  $1$ , pero por el mismo motivo que antes  $k \neq 0$ . Pero en este caso, si  $k = 1$ :

$$(t_{\bar{a}}^{-1}r)^2 = t_{\bar{a}}^{-1}rt_{\bar{a}}^{-1}r^{-1}r^2 = t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{b}}^{-1}r^2 = 1,$$

lo cual contradice lo que hemos asumido, por lo que no obtenemos ningún otro grupo.

### Caso $n = 2$

Este caso es el más popular y contiene cuatro tipos, con generadores  $t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, s, r$  y relaciones

$$t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, s^2 = 1, t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}, t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{b}}^{-1}$$

además de, en

$$\begin{aligned}
G_2^1, & \quad r^2 = 1, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}, (rs)^2 = 1, \\
G_2^2, & \quad r^2 = 1, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}, (rs)^2 = t_{\bar{b}}, \\
G_2^3, & \quad r^2 = 1, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}}, (rs)^2 = 1, \\
G_2^4, & \quad r^2 = t_{\bar{a}}, t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}, (rs)^2 = t_{\bar{b}}.
\end{aligned}$$

Suponemos primero que  $G$  contiene una simetría axial  $r$  para la que se cumple la condición (5.1). Entonces  $r^2 = 1$ , y  $r$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{a}}$ . Además,  $rs$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{b}}$  ya que  $t_{rs(\bar{b})} = t_{\bar{b}}^{rs} = rst_{\bar{b}}(rs)^{-1} = rst_{\bar{b}}s^{-1}r = (t_{\bar{b}}^s)^r = (t_{\bar{b}}^{-1})^r = t_{\bar{b}}$ . Como  $rs$  es OR, o es una simetría axial, en cuyo caso  $(rs)^2 = 1$ , o es una simetría axial con traslación. En este último caso, como  $rs$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{b}}$ , el vector de traslación de  $rs$  será de la forma  $n\bar{b}$  con  $n \in \mathbb{R}$ , y por tanto  $(rs)^2 = t_{n\bar{b}}^2 = (t_{\bar{b}}^n)^2 = t_{\bar{b}}^{2n}$ . Así que podemos recoger ambos casos considerando  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}^k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Como antes, tomando  $k = 0$  ó  $1$  obtenemos los tipos  $G_2^1$  y  $G_2^2$  respectivamente.

Suponemos ahora que  $G$  contiene una simetría axial  $r$  cumpliendo la condición (5.2). Entonces  $r^2 = 1$ , y  $r$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}$  ( $(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}})^r = t_{\bar{b}}^rt_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}$ ). Además,  $rs$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$  ya que  $(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^{rs} = rst_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}(rs)^{-1} = ((t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^s)^r = (t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}})^r = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$ . Como antes,  $(rs)^2 = 1$  o  $t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$ . En el primer caso obtenemos el tipo  $G_2^3$ , y en el segundo caso, cambiamos el símbolo  $s$  por  $t_{\bar{b}}s$ , de forma que las relaciones  $s^2 = 1$ ,  $t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}$ ,  $t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{b}}^{-1}$  se siguen manteniendo, mientras que  $(rs)$  ahora cumple:

$$(rt_{\bar{b}}s)^2 = rt_{\bar{b}}r^{-1}rsrt_{\bar{b}}r^{-1}rs = (t_{\bar{a}}rs)^2 = t_{\bar{a}}rst_{\bar{a}}(rs)^{-1}(rs)^2 = t_{\bar{a}}(t_{\bar{a}}^s)^r(rs)^2 = t_{\bar{a}}(t_{\bar{a}}^{-1})^r(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}) = t_{\bar{a}}t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1} = 1,$$

por lo que obtenemos de nuevo el grupo  $G_2^3$ .

Suponemos finalmente que  $G$  no contiene simetrías axiales. Utilizando la condición (5.1) podemos tomar, al igual que hicimos en el caso  $n = 1$ ,  $r^2 = t_{\bar{a}}$ , y también  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}^k$  con  $k = 0, 1$ . Sin embargo, si  $k = 0$ ,  $rs$  es una simetría axial, luego no puede ser. Tomando  $k = 1$  obtenemos el grupo  $G_2^4$ . Si por el contrario utilizamos la condición (5.2), podemos asumir como antes (caso  $n = 1$ ) que  $r^2 = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}$ , y que  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$ . Pero entonces,

$$(t_{\bar{a}}rs)^2 = t_{\bar{a}}(t_{\bar{a}}^{-1})^r(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}) = t_{\bar{a}}t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1} = 1,$$

lo cual supone que  $t_{\bar{a}}rs$  es una simetría axial y contradice lo que hemos asumido, por lo que no obtenemos ningún otro grupo.

### Caso $n = 4$

Este caso, que también es sencillo, contiene dos tipos, con generadores  $t_{\bar{a}}$ ,  $t_{\bar{b}}$ ,  $s$ ,  $r$  y relaciones

$$t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, \quad s^4 = 1, \quad t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}$$

además de, en

$$\begin{aligned} G_4^1, & \quad r^2 = 1, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}, \quad (rs)^2 = 1, \\ G_4^2, & \quad r^2 = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}, \quad (rs)^2 = 1. \end{aligned}$$

De las relaciones que definen  $G_4$  se sigue que si  $r \in G \setminus G^+$  actúa en  $t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}$  como en (5.2), entonces  $t_{rs(\bar{a})} = t_{\bar{a}}^{rs} = (t_{\bar{a}}^s)^r = t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}^{rs} = (t_{\bar{a}}^{-1})^r = t_{\bar{b}}^{-1}$ , es decir,  $rs$  actúa en  $t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}$  como en (5.1). Por lo tanto podemos ignorar la condición (5.2) y asumir que  $t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}$ . Entonces  $r^2 = 1$  si  $r$  es una simetría axial, o  $r^2 = t_{\bar{a}}$  si  $r$  es simetría axial con traslación (como en el caso  $n = 1$ ). Además se cumple que  $(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^{rs} = ((t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^s)^r = (t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{b}}^{-1})^r = t_{\bar{a}}^{-1}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$ , luego  $(rs)^2 = 1$  o  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$ . Cuando  $(rs)^2 = 1$  obtenemos los tipos  $G_4^1$  y  $G_4^2$ . Si  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$  cambiamos  $s$  por  $t_{\bar{a}}s$ , de forma que las relaciones que definen  $G_4$  no se ven afectadas, mientras que  $(rs)$  ahora cumple:

$$(rt_{\bar{a}}s)^2 = rt_{\bar{a}}r^{-1}rsrt_{\bar{a}}r^{-1}rs = (t_{\bar{a}}rs)^2 = t_{\bar{a}}rst_{\bar{a}}(rs)^{-1}(rs)^2 = t_{\bar{a}}t_{\bar{a}}^{rs}(rs)^2 = t_{\bar{a}}(t_{\bar{b}})^r(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}) = t_{\bar{a}}t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1} = 1.$$

Por lo tanto, no obtenemos ningún grupo nuevo.

### Caso $n = 3$

Este caso es bastante complicado y contiene dos tipos, con generadores  $t_{\bar{a}}$ ,  $t_{\bar{b}}$ ,  $s$ ,  $r$  y relaciones

$$t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, \quad s^3 = 1, \quad t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}, \quad t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}$$

además de, en

$$\begin{aligned} G_3^1, \quad & r^2 = 1, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}}, \quad (rs)^2 = 1, \\ G_3^2, \quad & r^2 = 1, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}}, \quad (rs)^2 = 1. \end{aligned}$$

De acuerdo con la descripción de  $G_3$  vista en el apartado 5.1,  $s = s_{(O, 2\pi/3)}$  y las imágenes de  $O$  por las traslaciones  $t_{\bar{a}}^{\pm 1}$ ,  $t_{\bar{b}}^{\pm 1}$ ,  $(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^{\pm 1}$  son las que se muestran en la siguiente figura:

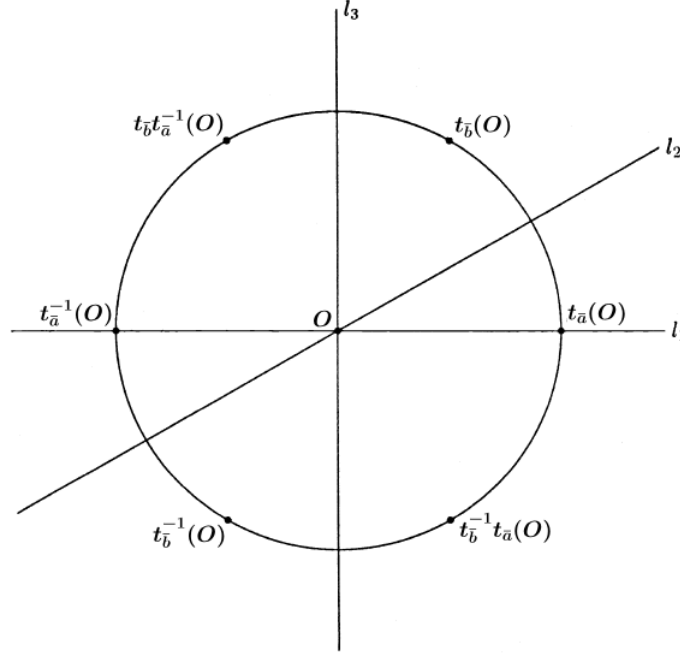


Figura 21: Imágenes de  $O$  por  $t_{\bar{a}}^{\pm 1}$ ,  $t_{\bar{b}}^{\pm 1}$ ,  $(t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1})^{\pm 1}$

Si  $r \in G \setminus G^+$  tiene eje paralelo a la traslación  $t_{\bar{a}}$ , se tiene que (ver caso (1) de la demostración del Lema 5.5),  $t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}} \neq t_{\bar{b}}^{-1}$ . Por lo tanto, la condición (5.1) no puede darse cuando  $n = 3$ , así que podemos asumir la condición (5.2) para algún par de generadores de  $T$ . Fijándonos en la Tabla 2, podemos ver que existen exactamente tres posibilidades para dicho par de generadores cuando se da la condición (5.2):

$$(1) \quad t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}}, \quad (2) \quad t_{\bar{a}}, t_{\bar{b}}, \quad (3) \quad t_{\bar{b}}, t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}^{-1}$$

en términos de los generadores originales  $t_{\bar{a}}$ ,  $t_{\bar{b}}$ . Resumiendo:

(1) En este caso se cumplen las relaciones:  $t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}}$  y  $(t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}})^r = t_{\bar{b}}$ . Además,

$$(t_{\bar{b}}^r)^{-1}t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}} \Rightarrow t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}^rt_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}^{-1}t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{a}},$$

es decir,  $r$  tiene eje paralelo a la recta  $l_1$  de la Figura 21.

(2) En este caso se cumplen las relaciones:  $t_a^r = t_b$  y  $t_b^r = t_a$ . Además,

$$(t_b t_a)^r = t_b^r t_a^r = t_a t_b = t_b t_a,$$

es decir,  $r$  tiene eje paralelo a la recta  $l_2$  de la Figura 21.

(3) En este caso se cumplen las relaciones:  $t_b^r = t_b t_a^{-1}$  y  $(t_b t_a^{-1})^r = t_b$ . Además,

$$t_b = t_b^r (t_a^r)^{-1} \Rightarrow t_a^r = t_b^{-1} t_b^r = t_b^{-1} t_b t_a^{-1} = t_a^{-1},$$

es decir,  $r$  tiene eje paralelo a la recta  $l_3$  de la Figura 21.

La correspondiente  $r \in G \setminus G^+$  tiene por tanto eje paralelo a una de las rectas  $l_1, l_2, l_3$  de la Figura 21. Pero como  $s^2 = r_{l_2} r_{l_3}$  (ver Teorema 2.20), el efecto en  $T$  de la conjugación por  $s^2 r$  en el caso (3) es el mismo que el que tiene la conjugación por  $r$  en el caso (2), luego es suficiente con considerar los casos (1) y (2). Notemos que en el caso (2)  $r$  actúa en  $T$  como en el tipo  $G_3^2$ , mientras que en el caso (1)  $r$  actúa en  $T$  como en el tipo  $G_3^1$ .

Del siguiente lema omitimos la demostración.

**Lema 5.6.** *Si  $G$  contiene un giro  $s$  de amplitud  $2\pi/3$  y una simetría axial con traslación,  $r$ , de eje  $l$ , entonces  $G$  contiene una simetría axial  $r' = t'r$ , con  $t' \in T$ , y  $r'$  de eje paralelo a  $l$ .*

Volvamos a  $G_3$ . Si  $r$  es una simetría axial,  $r^2 = 1$ . Si por el contrario,  $r$  es una simetría axial con traslación, cambiamos  $r$  por una simetría axial utilizando el Lema 5.6, de forma que el efecto en  $T$  de la conjugación por  $r$  permanece invariante. Por lo tanto podemos asumir que  $r^2 = 1$ . Ahora, sustituimos  $s$  por  $(rs)^2 s = s^r s^2$ . Por lo visto en la demostración del Teorema 4.3,  $s^r = s_{(r(O), -2\pi/3)}$ , y por tanto  $s^r s^2 = s_{(r(O), -2\pi/3)} s_{(O, 4\pi/3)}$  es un giro de ángulo  $-2\pi/3 + 4\pi/3 = 2\pi/3$  (ver Figura 10(ii)). Luego la nueva  $s$  sigue verificando la relación  $s^3 = 1$ . Además, como  $(rs)^2 = s^r s$  es una traslación (ver Figura 10(i)), el efecto de la conjugación en  $T$  no cambia. Finalmente,  $(rs)$  ahora cumple:

$$(r(rs)^2 s)^2 = (s r s^2)^2 = (r^s)^2 = (r^2)^s = 1.$$

Las relaciones  $r^2 = (rs)^2 = 1$  junto con la acción de  $r$  en  $T$  dada por (1) y (2) proporcionan los tipos  $G_3^1$  y  $G_3^2$ .

### Caso $n = 6$

Este último caso contiene solo un tipo, con generadores  $t_a, t_b, s, r$  y relaciones

$$t_a t_b = t_b t_a, \quad s^6 = 1, \quad t_a^s = t_b, \quad t_b^s = t_b t_a^{-1}$$

además de, en

$$G_6^1, \quad r^2 = 1, \quad t_a^r = t_b, \quad t_b^r = t_a, \quad (rs)^2 = 1.$$

Al igual que en el caso anterior, las imágenes de  $O$  por las traslaciones  $t_a^{\pm 1}, t_b^{\pm 1}, (t_b t_a^{-1})^{\pm 1}$  son las que se muestran en la Figura 21, donde  $O$  es ahora el centro de  $s = s_{(O, \pi/3)}$ . Al igual que en el caso  $n = 3$ , la condición (5.1) no puede darse, cualquier  $r \in G \setminus G^+$  tiene eje paralelo a  $l_1, l_2$  o

$l_3$ , y  $t_b^r$  es igual a  $t_b^{-1}t_a$ ,  $t_a$  o  $t_b t_a^{-1}$  respectivamente. Remplazando  $r$  por  $s^4 r$  reducimos (3) a (2) ya que  $t_a^{s^4 r} = (t_a^r)^{s^4} = (t_a^{-1})^{s^4} = t_b$  y  $t_b^{s^4 r} = (t_b^r)^{s^4} = (t_b t_a^{-1})^{s^4} = t_a$ . Además, en este caso  $s = r_{l_2} r_{l_1}$  (ver Teorema 2.20), por lo que cambiando  $r$  por  $sr$  reducimos (1) a (2). Con lo cual, es suficiente con analizar el caso (2), en el que  $t_a^r = t_b$  y  $t_b^r = t_a$ .

Como el Lema 5.6 también se cumple en este caso (pues  $s^2 = s_{(O, 2\pi/3)}$ ), podemos asumir  $r^2 = 1$ . Ahora, consideramos dos casos. Si  $r(O) = O$ ,  $(rs)^2 = s^r s = s_{(r(O), -\pi/3)} s_{(O, \pi/3)} = 1$ . Si por el contrario  $r(O) \neq O$ , sustituimos  $s$  por  $t^r s$  para alguna  $t \in T$ , de forma que al ser  $t^r$  una traslación, el efecto en  $T$  de la conjugación por  $s$  no se ve afectado. Veamos además que la nueva  $s$  sigue teniendo orden seis:

Sea  $l$  la recta que pasa por  $O$  y  $r(O)$ . Por el Teorema 2.20 podemos escribir  $s^r = s_{(r(O), -\pi/3)} = r_{l'} r_l$  con  $l'$  una recta que pasa por  $r(O)$  y tal que forma con  $l$  un ángulo de amplitud  $\pi/6$  medido de  $l'$  a  $l$  en sentido antihorario. De forma similar,  $s = s_{(O, \pi/3)} = r_l r_{l''}$  con  $l''$  una recta que pasa por  $O$  y tal que forma con  $l$  un ángulo de amplitud  $\pi/6$  medido de  $l''$  a  $l$  en sentido antihorario. Por lo tanto, utilizando el Teorema 2.19 se tiene que  $(rs)^2 = s^r s = r_{l'} r_l r_l r_{l''} = r_{l'} r_{l''}$  es una traslación no trivial con vector de traslación perpendicular a las rectas  $l'$  y  $l''$ . Luego  $rs$  es una simetría axial con traslación de eje perpendicular a  $l'$  y  $l''$ .

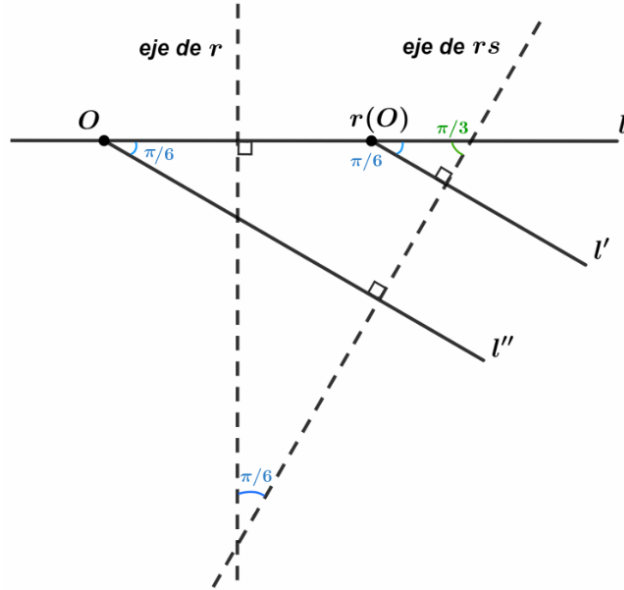


Figura 22: Composición  $t^r s$

Aplicando el Lema 5.6 elegimos  $t$  para que  $trs$  sea una simetría axial de eje paralelo al de  $rs$ . Así,  $t^r s = r t r s$  es un producto de dos simetrías axiales cuyos ejes forman un ángulo de amplitud  $\pi/6$ , luego por el Teorema 2.19, la nueva  $s$  es un giro de ángulo  $\pi/3$  y por tanto de orden seis. Además, como acabamos de ver, basta tomar  $t$  como en el Lema 5.6 para que  $trs$ , que es ahora la nueva  $rs$ , sea una simetría axial. Luego podemos asumir que en cualquier caso  $(rs)^2 = 1$ , obteniendo así el grupo  $G_6^1$ .

### 5.3. Teselaciones del plano

En este apartado vamos a ver 17 ejemplos de teselaciones de  $\mathbb{R}^2$ , cada una de ellas asociada a uno de los 17 grupos cristalográficos planos obtenidos en los apartados 5.1 y 5.2.

**Definición 5.7.** Una **teselación del plano** es un recubrimiento de  $\mathbb{R}^2$  por polígonos que no se solapan entre sí. Por recubrimiento nos referimos a que cada punto de  $\mathbb{R}^2$  cae en el interior o en el borde de al menos uno de los polígonos. Que los polígonos no se solapen quiere decir que en caso de que dos polígonos distintos se intersequen, lo harán en un fragmento de su borde.

En una teselación, los polígonos tienen por tanto un borde y un interior, y podemos pensar en ellos como si fuesen azulejos. Además, simplemente por conveniencia, vamos a asumir que todos los ángulos interiores de todos los polígonos son menores que  $\pi$ , lo cual es equivalente a que cada polígono sea la intersección de, al menos, tres semiplanos, y sea por lo tanto convexo.

### Teselaciones regulares

**Definición 5.8.** Un polígono se dice **regular** si todos sus ángulos interiores tienen la misma amplitud y todos sus lados la misma medida.

**Definición 5.9.** Una **teselación regular** es una teselación por polígonos regulares congruentes, tales que si dos de ellos se intersecan lo hacen en un lado o vértice común.

Consideramos una teselación regular por polígonos de  $n$  lados de modo que en cada vértice se intersecan  $m$  polígonos, siendo  $n, m \geq 3$ . Cada polígono de  $n$  lados se puede descomponer en  $n - 2$  triángulos, luego la suma de sus ángulos interiores es  $(n - 2)\pi$ . Por lo tanto, cada ángulo interior tiene amplitud  $(n - 2)\pi/n$ , y como hay  $m$  de estos ángulos en cada vértice, tenemos que

$$m(n - 2)\pi/n = 2\pi \Rightarrow m(n - 2) = 2n \Rightarrow mn - 2m - 2n = 0 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 4.$$

Como solo hay tres formas de obtener el número 4 como un producto de dos enteros positivos, existen, como mucho, tres tipos de teselaciones regulares de  $\mathbb{R}^2$ , aquellas con parámetros

$$(m, n) = (4, 4), (3, 6), (6, 3).$$

Afortunadamente las tres teselaciones anteriores existen, y son las que se muestran en las Figuras 23, 24 y 25.

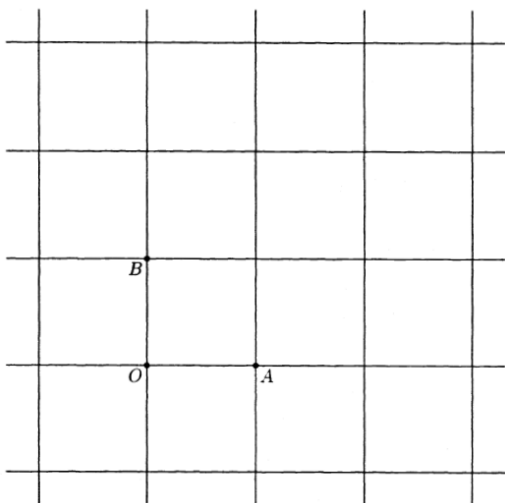


Figura 23: Caso  $(m, n) = (4, 4)$

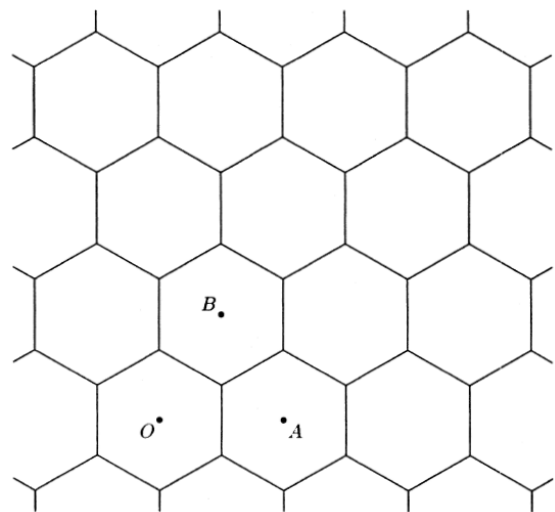


Figura 24: Caso  $(m, n) = (3, 6)$



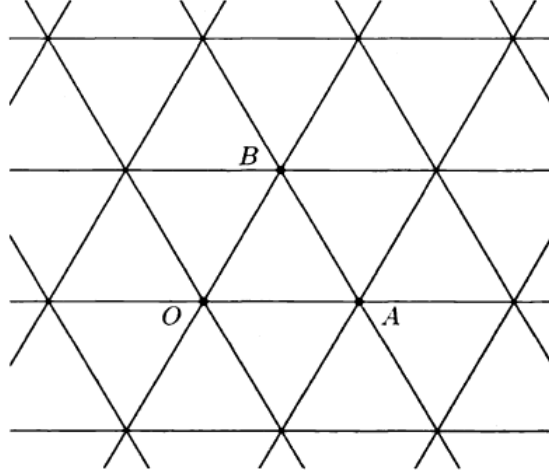


Figura 25: Caso  $(m, n) = (6, 3)$

Calculamos ahora los grupos de simetría de estas figuras usando los puntos de referencia  $O$ ,  $A$  y  $B$  marcados en ellas. En cada caso tomamos  $t_{\bar{a}} = t_{\overline{OA}}$  y  $t_{\bar{b}} = t_{\overline{OB}}$ . En el caso de la Figura 23, tomamos  $r = r_l$  con  $l$  la recta que pasa por  $O$  y  $A$ , de forma que el eje de  $r$  es paralelo a  $t_{\bar{a}}$  y perpendicular a  $t_{\bar{b}}$ . Entonces,

$$t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, \quad r^2 = 1, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}. \quad (5.3)$$

En los casos de las Figuras 24 y 25 tomamos  $r = r_l$  con  $l$  la bisectriz del ángulo  $\widehat{BOA}$ . Entonces,

$$t_{\bar{a}}t_{\bar{b}} = t_{\bar{b}}t_{\bar{a}}, \quad r^2 = 1, \quad t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{a}}. \quad (5.4)$$

Elegimos  $s = s_{(O, \pi/2)}$  en el caso  $(m, n) = (4, 4)$ . Notemos que  $(rs)^2 = s^r s = s_{(r(O), -\pi/2)} s_{(O, \pi/2)} = 1$  ya que  $r(O) = O$  (lo mismo va a ocurrir en los dos casos restantes independientemente de la amplitud elegida para  $s$ ). Entonces en el caso de la Figura 23 tenemos:

$$s^4 = 1, \quad t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}, \quad (rs)^2 = 1. \quad (5.5)$$

En los casos  $(m, n) = (3, 6)$  y  $(m, n) = (6, 3)$  elegimos  $s = s_{(O, \pi/3)}$  y tenemos:

$$s^6 = 1, \quad t_{\bar{a}}^s = t_{\bar{b}}, \quad t_{\bar{b}}^s = t_{\bar{a}}^{-1}, \quad (rs)^2 = 1 \quad (5.6)$$

Como las relaciones (5.3) y (5.5) definen  $G_4^1$  y las relaciones (5.4) y (5.6) definen  $G_6^1$ , se tiene que:

$$\text{Sym}((4, 4)) = G_4^1, \quad \text{Sym}((3, 6)) = \text{Sym}((6, 3)) = G_6^1.$$

Como podemos ver, los grupos de simetría de  $(3, 6)$  y  $(6, 3)$  son el mismo. Las correspondientes teselaciones son duales una de la otra en el sentido de que uniendo en una de ellas los centros de los polígonos adyacentes obtenemos la otra. Es claro que  $(4, 4)$  es dual de sí misma.

Habiéndonos aparecido los grupos  $G_4^1$  y  $G_6^1$ , busquemos ahora teselaciones que se correspondan con el resto de grupos cristalográficos planos obtenidos en los apartados 5.1 y 5.2. Para ello eliminamos la condición de regularidad de los polígonos que aparecen en la teselación, exigiendo únicamente que todos ellos sean congruentes. En cada una de las figuras que vamos a ir mostrando, especificaremos las traslaciones  $t$ , las simetrías axiales  $r$  y las simetrías axiales con traslación  $q$  en términos de un par de puntos distintos  $C, D \in \mathbb{R}^2$  como sigue:

- $t(C, D)$  es la traslación  $t_{\overline{CD}}$ ,
- $r(C, D)$  es la simetría axial de eje la recta que pasa por  $C$  y  $D$ ,
- $q(C, D) = t(C, D)r(C, D)$ .

Además, para los grupos  $G_n$  con  $n = 2, 3, 4, 6$ , tomaremos  $s = s_{(O, 2\pi/n)}$ . En cada figura excepto en la última, Figura 40, los puntos  $O, A$  y  $B$  están señalados y  $t_{\bar{a}} = t(O, A)$ ,  $t_{\bar{b}} = t(O, B)$ . El generador  $r$  de tipo OR será especificado individualmente en cada caso cuando exista, al igual que se hará con los valores de  $r^2$  y  $(rs)^2$  donde sea necesario o conveniente.

### Descendientes de (4,4)

Las Figuras 26 y 27 se han obtenido dividiendo cada cuadrado de  $(4, 4)$  en un par de rectángulos o trapecios congruentes respectivamente. En el caso de la Figura 27, el hecho de que todos los polígonos tengan la misma orientación impide la existencia de  $r$ . En el caso de la Figura 26,  $rs$  fija el punto  $C$ , y como es OR, necesariamente es una simetría axial. Además,  $r$  tiene eje paralelo a  $t_{\bar{a}}$  y perpendicular a  $t_{\bar{b}}$ , de donde  $t_{\bar{a}}^r = t_{\bar{a}}$  y  $t_{\bar{b}}^r = t_{\bar{b}}^{-1}$ .

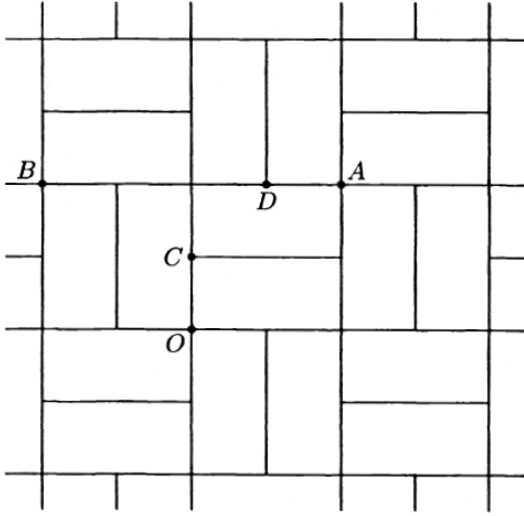


Figura 26:  $G_4^2$ :  $r = q(C, D)$ ,  $r^2 = t_{\bar{a}}$ ,  $(rs)^2 = 1$

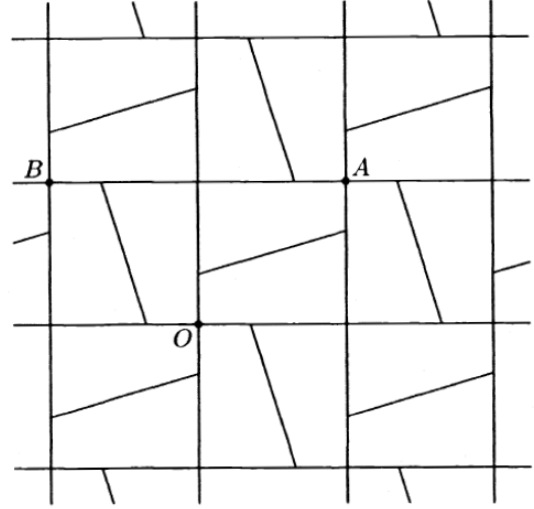


Figura 27:  $G_4$

### Ladrillos

Los rectángulos de dimensiones  $2 \times 1$  que forman la Figura 26 son una buena fuente de ejemplos. Los podemos poder como si fuesen ladrillos, bien con la disposición usual de estos como en la Figura 28, o bien como en las Figuras 29, 30 y 31 con los bordes alineados, escalonados o en zig-zag respectivamente. También se pueden colocar siguiendo la disposición de las baldosas de un suelo de parquet (Figura 32).

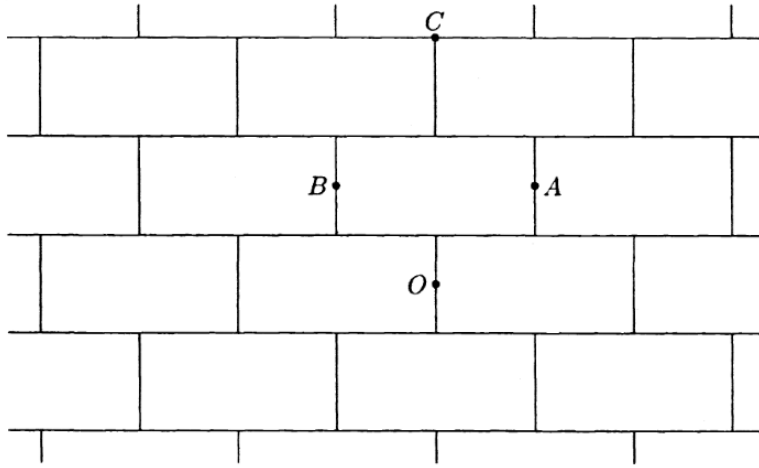


Figura 28:  $G_2^3$ :  $r = r(O, C)$ ,  $r^2 = (rs)^2 = 1$

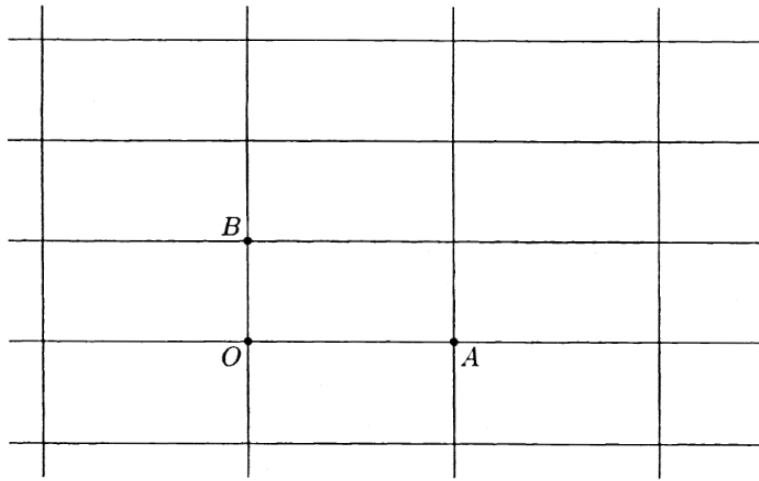


Figura 29:  $G_2^1$ :  $r = r(O, A)$ ,  $r^2 = (rs)^2 = 1$

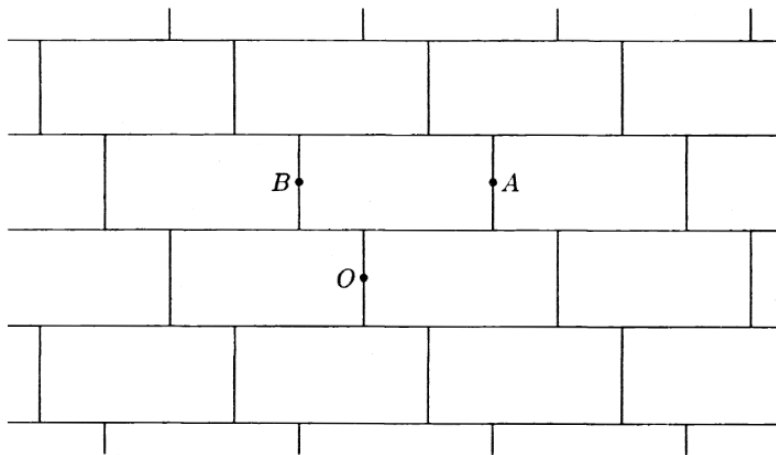


Figura 30:  $G_2$

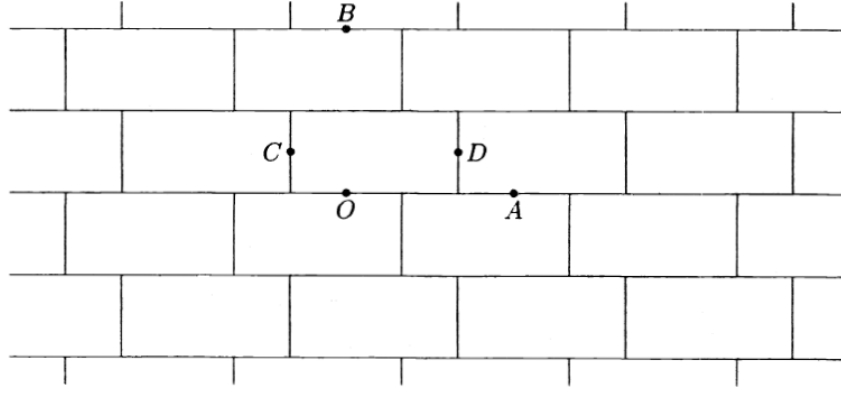


Figura 31:  $G_2^2$ :  $r = r(C, D)$ ,  $r^2 = 1$ ,  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}$

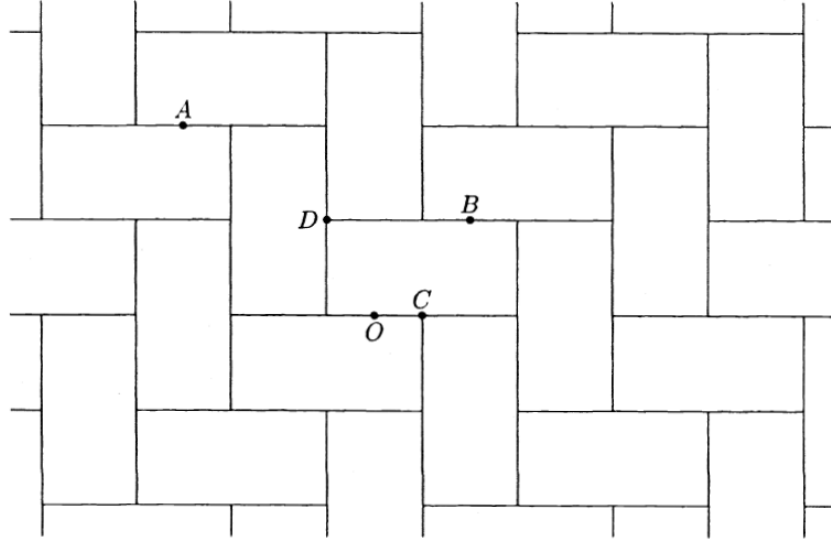


Figura 32:  $G_2^4$ :  $r = q(C, D)$ ,  $r^2 = t_{\bar{a}}$ ,  $(rs)^2 = t_{\bar{b}}$

### Ladrillos partidos

Un rectángulo de dimensiones  $6 \times 1$  puede dividirse mediante segmentos verticales en 6 cuadrados de dimensiones  $1 \times 1$ , cada uno de los cuales a su vez puede ser dividido por un segmento vertical ( $v$ ) u horizontal ( $h$ ). La secuencia infinita de divisiones  $hvhvv$  de periodo 6 no coincide con su secuencia inversa  $vvhhvv$ , y el giro  $s = s_{(O, \pi)}$  de las Figuras 28 y 29 transforma segmentos horizontales en segmentos horizontales y segmentos verticales en segmentos verticales. Luego  $s$  se pierde cuando remplazamos cada ladrillo de las Figuras 28 y 29 por una rectángulo de dimensiones  $6 \times 1$  dividido de esta forma, como en las Figuras 33 y 34 respectivamente.

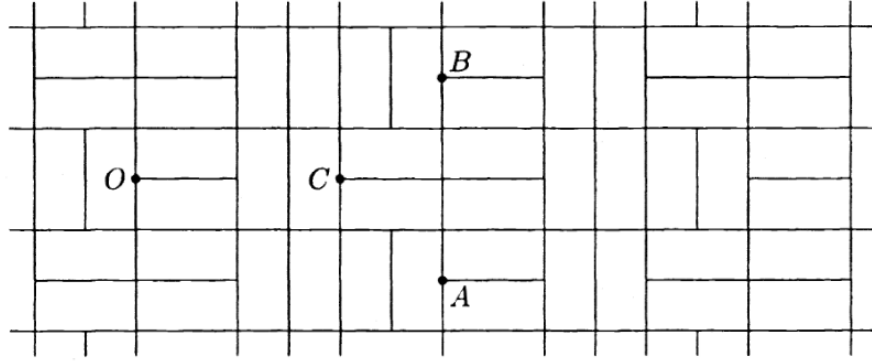


Figura 33:  $G_1^2$ :  $r = r(O, C)$ ,  $r^2 = 1$

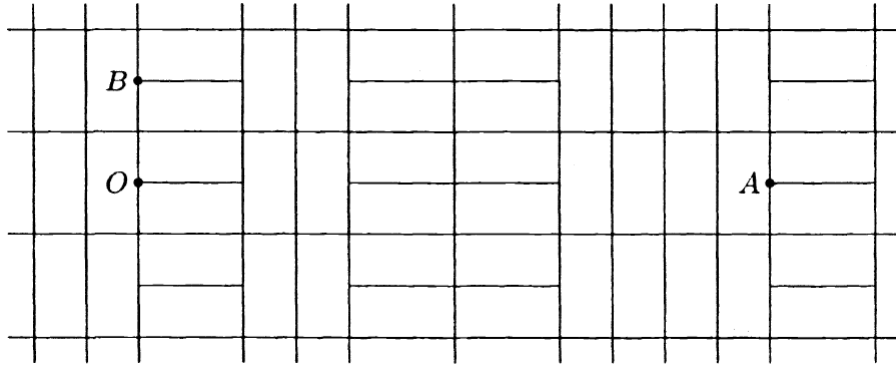


Figura 34:  $G_1^1$ :  $r = r(O, A)$ ,  $r^2 = 1$

El giro  $s = s_{(O, \pi)}$  de la Figura 31 también se pierde cuando dividimos cada rectángulo a partir de una de sus diagonales, como se muestra en las Figuras 35 y 36. En la primera las divisiones se han hecho alternando en cada fila la dirección de las diagonales, mientras que en la segunda figura, por cada fila con diagonal en una dirección aparecen dos filas con diagonal en la dirección opuesta.

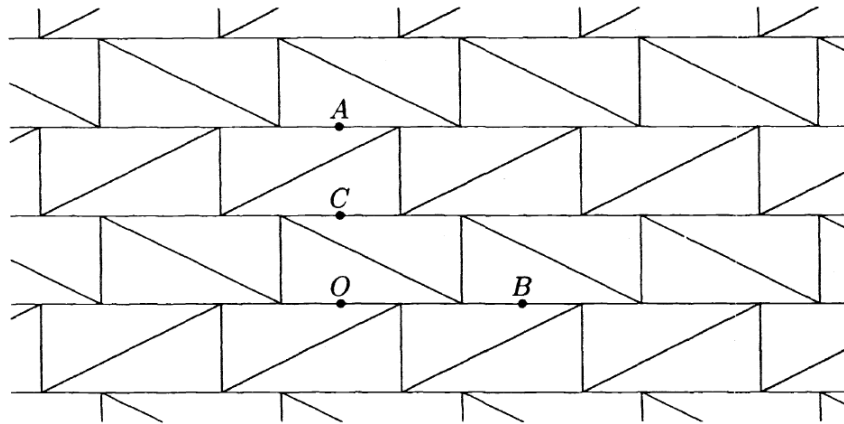


Figura 35:  $G_1^3$ :  $r = q(O, C)$ ,  $r^2 = t_{\bar{a}}$

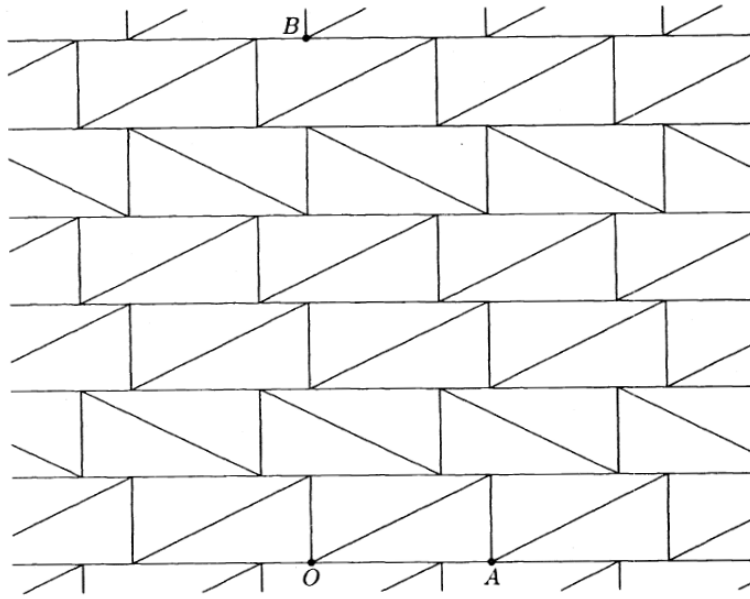


Figura 36:  $G_1$

### Descendientes de (3,6)

Cada uno de los hexágonos de la Figura 24 puede dividirse en tres rombos como se muestra en las Figuras 37 y 38. Mientras que en la segunda figura, por cada hexágono dividido empezando desde la parte inferior ( $\gamma$ ) aparecen dos hexágonos divididos empezando desde su parte superior ( $\lambda$ ), en la primera figura todos los hexágonos están divididos de forma homogénea ( $\lambda$ ). Además, en cada uno de los hexágonos, los tres rombos obtenidos se han dividido a su vez en dos paralelogramos congruentes.

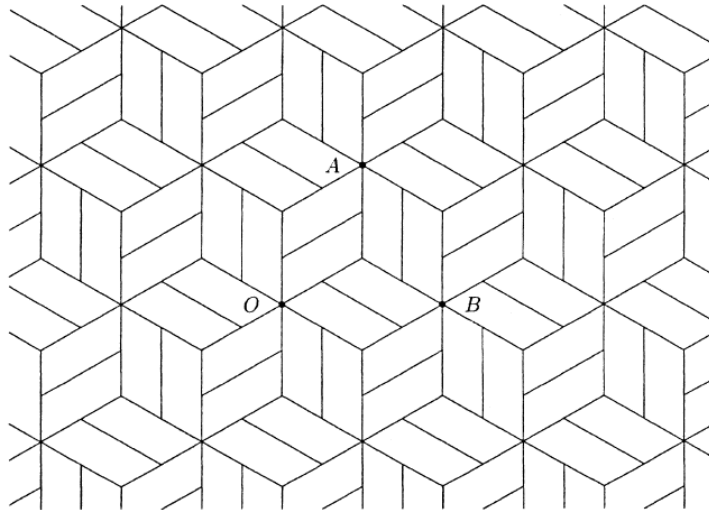


Figura 37:  $G_6$

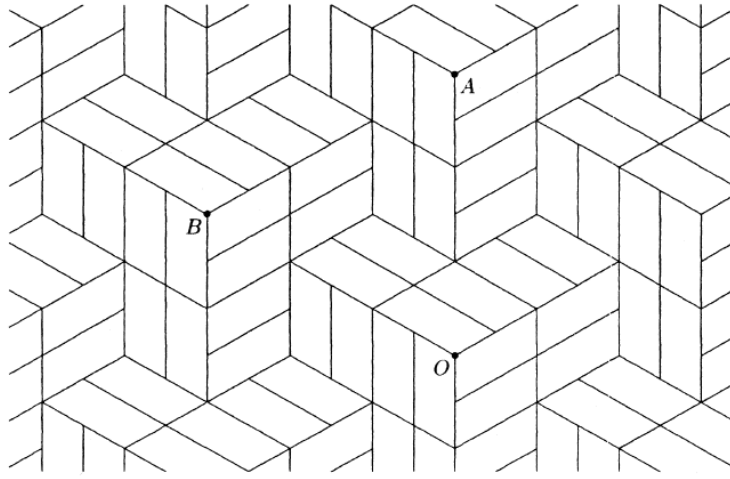


Figura 38:  $G_3$

Cada uno de los hexágonos de la Figura 24 también puede ser dividido en un par de trapecios de tres formas diferentes, dos de las cuales se muestran en las Figuras 39 y 40. La diferencia entre estas dos figuras está en que en la primera todos los giros tienen su centro en el eje de alguna simetría axial, mientras que en la segunda existen centros de giro, como por ejemplo el punto  $P$  marcado en la figura, que no se encuentran en el eje de ninguna simetría axial.

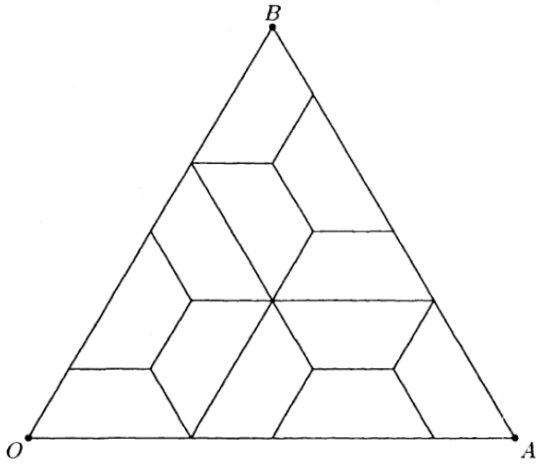


Figura 39:  $G_3^1$ :  $r = r(O, A)$ ,  $rs = r(O, s^{-1}(B))$

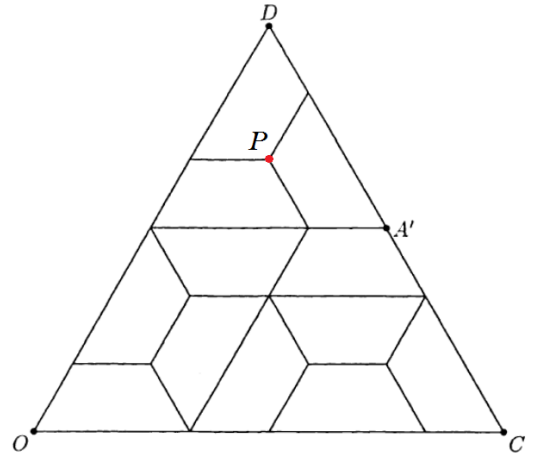


Figura 40:  $G_3^2$ :  $r = r(O, C)$ ,  $t_{\bar{a}} = t(O, A')^2$ ,  $t_{\bar{b}} = t_{\bar{a}}^r$ ,  $rs = r(O, D)$





## Conclusiones

En este trabajo hemos podido ver la interrelación que existe entre las diferentes ramas de las matemáticas, ya que para llegar a la clasificación de los subgrupos discretos de los grupos de isometrías de la recta y del plano reales, hemos utilizado conceptos y resultados tanto algebraicos, como topológicos y geométricos. Además, a la vista de las aplicaciones de los grupos de friso y de los grupos cristalográficos, también podemos apreciar la relación que tienen las matemáticas con otras disciplinas como el arte o la arquitectura.

Quizás no seamos conscientes de que las matemáticas están constantemente a nuestro alrededor, tanto en lo que es obra del hombre como en la propia naturaleza. Un claro ejemplo de su presencia en la naturaleza son los panales de abeja, que no son más que teselaciones del plano hechas con hexágonos regulares. ¿Se podrían sustituir los hexágonos por pentágonos regulares? La respuesta es que no, ya que como hemos visto, solo es posible conseguir una teselación regular del plano a partir de triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares.

Desde mi punto de vista, es sorprendente que, a diferencia de lo que la imaginación diría, a partir de una figura inicial, el número de cenefas o mosaicos que podamos construir sea finito.

Una vez realizado este trabajo sería interesante continuar con el estudio, por ejemplo, del grupo de isometrías del espacio, o también con las posibles teselaciones de la esfera, llegando a ver la correspondencia que existe entre las teselaciones regulares de la esfera y los cinco sólidos platónicos.



## Referencias

- [1] D. L. Johnson, *Symmetries*, Springer, Great Britain, 2001.
- [2] Christiane Rousseau and Yvan Saint-Aubin, *Mathematics and Technology*, Springer, New York, 2008, página 46.
- [3] Joseph A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, Brooks/Cole Cengage Learning, USA, 2010, páginas 475-476.
- [4] Página web del CSIC:  
<http://informesdelaconstruccion.revistas.csic.es/index.php/informesdelaconstruccion/article/view/1717/1982>
- [5] Página web de la American Mathematical Society:  
<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-art3>
- [6] Página web de Timothy Peil, profesor emérito de matemáticas de la Universidad Estatal de Minnesota en Moorhead:  
<http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C3Transform/0historical.htm>